[東京工業大学 1960 年 数学Ⅲ $\boxed{1}$]

☆ ☆

$(n+1)a_n = na_{n+1} + 2a_1$ なる関係を満たす数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

☆ ☆

$$(n+1)a_n = na_{n+1} + 2a_1 \iff \frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{2a_1}{n(n+1)}$$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = -2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)a_1$$

$\dfrac{a_n}{n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} - b_n = -2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)a_1$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1} - b_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)a_1\right\}$

$$b_n - b_1 = -2a_1\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$b_n - b_1 = -2a_1\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$b_1 = a_1$ であるから $b_n = -a_1 + \dfrac{2a_1}{n}$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} b_n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-a_1 + \frac{2a_1}{n}\right)$$

$$= -a_1$$