[東京工業大学 1960 年 数学Ⅱ $\boxed{2}$]

☆―――☆

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が互いに異なる $x_1,\ x_2,\ x_3$ に対して $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ を満たしているとき，$f'(x_2)$ を $x_1,\ x_2,\ x_3$ で表せ。また，$x_1<x_2<x_3$ なるとき，上の結果を用いて $f'(x_2)$ の符号を調べよ。

☆―――☆

$g(x)=f(x)-f(x_1)$ とおくと $g(x)=x^3+ax^2+bx+c-f(x_1)$ …①

仮定より $x_1,\ x_2,\ x_3$ は $g(x)=0$ の相異なる 3 つの解であり，

$g(x)$ の x^3 の係数は 1 だから

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3 \quad \cdots②$$

①，②より $\begin{cases} a=-(x_1+x_2+x_3) \\ b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \\ c-f(x_1)=-x_1x_2x_3 \end{cases}$ である。

また，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ であるから

$$f'(x_2)=3{x_2}^2-2(x_1+x_2+x_3)x_2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

$$={x_2}^2-(x_1+x_3)x_2+x_3x_1$$

$$=(x_2-x_1)(x_2-x_3)$$

であり，$x_1<x_2<x_3$ であるから $f'(x_2)<0$ となる。