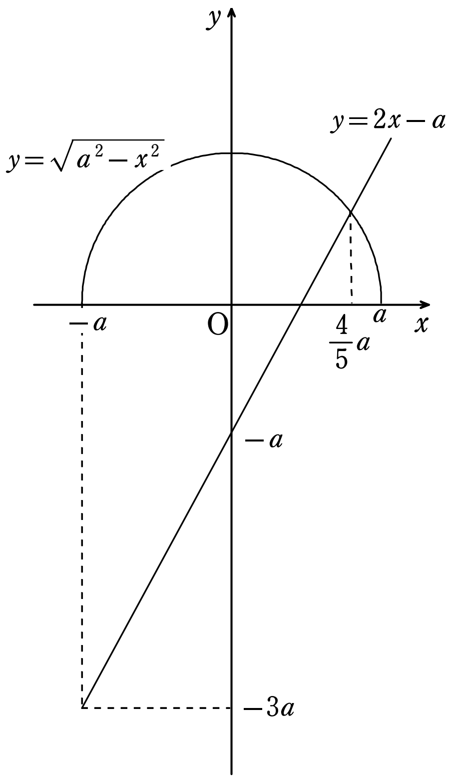
[東京工業大学 1960 年 数学Ⅱ $\boxed{1}$]

☆―――☆

$a>0$ のとき，$\sqrt{a^2-x^2} \geqq 2x-a$ を満たす x の範囲で，関数 $y=x+\dfrac{a^2}{x-a}$ の最大値および最小値を求めよ。

☆―――☆



$\sqrt{a^2-x^2} \geqq 2x-a$ …① を満たす x の範囲を求める。

$-a \leqq x \leqq a$ であり，

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ は原点中心，半径 a の円の上半分を表し，

$y=2x-a$ は直線を表している。

$2x-a \geqq 0$ すなわち $x \geqq \dfrac{a}{2}$ のもとで

方程式 $\sqrt{a^2-x^2}=2x-a$ を解くと

$$a^2-x^2=4x^2-4ax+a^2 \iff 5x^2-4ax=0$$

$$\iff x(5x-4a)=0$$

よって $x=\dfrac{4}{5}a$

したがって $-a \leqq x \leqq \dfrac{4}{5}a$ …② である。

次に，$y=f(x)=x+\dfrac{a^2}{x-a}$ とおくと $f'(x)=a-\dfrac{a^2}{(x-a)^2}=\dfrac{ax(x-2a)}{(x-a)^2}$ となるので

②の範囲における $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}a$	↗	$-a$	↘	$-\frac{21}{5}a$

よって $f(x)$ の最大値は $f(0)=-a$

最小値は $f\left(\dfrac{4}{5}a\right)=-\dfrac{21}{5}a$