[東京工業大学 1960 年 数学Ⅰ幾何 $\boxed{2}$]

△ABC の∠B, ∠C の 2 等分線がその外接円と交わる点をそれぞれ P, Q とするとき，$BP=CQ$ であるという。この三角形はいかなる三角形か。

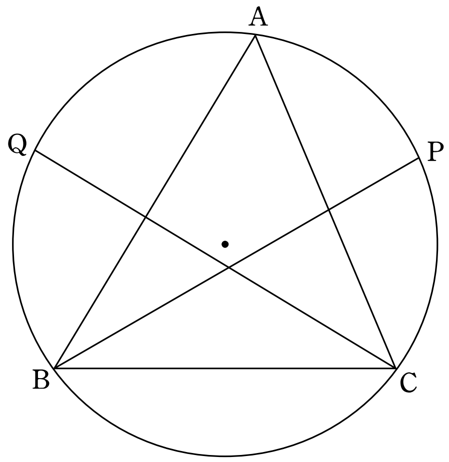
$BP=CQ$ より $\overset{\frown}{BCP}=\overset{\frown}{QBC}$ …① または $\overset{\frown}{BCP}=\overset{\frown}{QAC}$ …② である。

(ｉ) ①のとき

$\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{QB}$ であるから $\angle CBP=\angle QCB$ なので $\angle ACB=\angle ABC$

よって，$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形

逆に，$AB=AC$ なら $BP=CQ$ である。



(ⅱ) ②のとき

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{QAP}=\overset{\frown}{QA}+\overset{\frown}{AP}$ であるから

$\angle BAC=\angle QCA+\angle ABP$

$=\dfrac{1}{2}\angle BCA+\dfrac{1}{2}\angle ABC$ …③

また，$\angle BAC+\angle BCA+\angle ABC=180^\circ$ …④ であるから

③，④より $3\angle BAC=180^\circ \Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$ となる。

よって $\angle A=60^\circ$

逆も成り立つ。

(ｉ)，(ⅱ)より「$AB=AC$ の二等辺三角形」または「$\angle A=60^\circ$ の三角形」