[東京工業大学 1960 年 数学Ⅰ代数 $\boxed{1}$]

☆──────────────────────────────☆

ある新聞売子が 1 部 3 円で夕刊を仕入れ，これを 1 部 5 円で販売する。もし売れ残れば，1 部 1 円で新聞社にひきとってもらうものとする。30 日間毎日同じ部数の新聞を仕入れるとして，全体の利益をなるべく大きくするには，毎日何部ずつ仕入れたらよいか。ただし，30 日のうち 20 日は毎日 150 部ずつ，残りの 10 日は毎日 100 部ずつ売れるものとする。

☆──────────────────────────────☆

毎日 n 部ずつ仕入れるとし，利益を S_n とする。

（ｉ）$n>150$ のとき

$$S_n=\{150\times(5-3)+(n-150)\times(1-3)\}\times 20+\{100\times(5-3)+(n-100)\times(1-3)\}\times 10$$

$$=-60n+16000$$

（ii）$100\leqq n\leqq 150$ のとき

$$S_n=n(5-3)\times 20+\{100\times(5-3)+(n-100)\times(1-3)\}\times 10$$

$$=20n+4000$$

（iii）$0<n<100$ のとき

$$S_n=n(5-3)\times 20+n(5-3)\times 10$$

$$=60n$$

よって

(ｉ)のとき最大になるのは $n=151$ のときで $S_{151}=6940$

(ii)のとき最大になるのは $n=150$ のときで $S_{150}=7000$

(iii)のとき最大になるのは $n=99$ のときで $S_{99}=5940$

したがって $n=150$ のときに最大利益となるので，150 部ずつ仕入れればよい。

［ 東京工業大学 1960 年 数学Ⅰ代数 $\boxed{2}$ ］

$ax-(a+1)$ が x のいかんにかかわらず，つねに x^2 より小で，$-(x+1)^2$ より大であるように，a の範囲を求めよ。

条件より $x^2 > ax-(a+1) \iff x^2-ax+(a+1)>0 \quad \cdots$①

$x^2-ax+(a+1)=0$ の判別式を D_1 とすると，①が任意の x に対して成り立つとき

$D_1 = a^2-4(a+1)<0 \iff a^2-4a-4<0$ より $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2} \quad \cdots$②

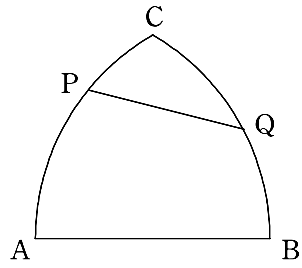
また，2 つ目の条件より $ax-(a+1)>-(x+1)^2 \iff x^2+(a+2)x-a>0 \quad \cdots$③

$x^2+(a+2)x-a=0$ の判別式を D_2 とすると，③が任意の x に対して成り立つとき

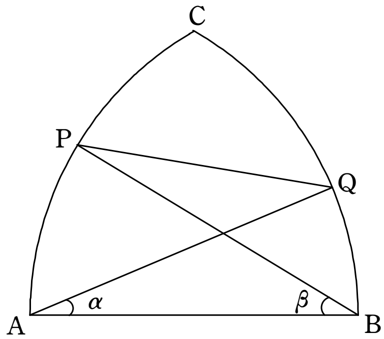
$D_2=(a+2)^2+4a<0 \iff a^2+8a+4<0$ より $-4-2\sqrt{3}<a<-4+2\sqrt{3} \quad \cdots$④

求める条件は②かつ④より $2-2\sqrt{2}<a<-4+2\sqrt{3}$

[東京工業大学 1960 年 数学Ⅰ幾何 $\boxed{1}$]



線分ABの両端A, Bをそれぞれ中心として，半径ABの円をえがいてできた右の図を考える。弧AC上に点Pを，弧BC上に点Qをとるとき，$PQ \leqq AB$を証明せよ。



$\angle QAB = \alpha,\ \angle PBA = \beta$ とおくと

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3},\ 0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たす。

$\alpha = 0$ のときは $Q = B$ であり，

$PQ = PB = AB$ となって題意は成り立つ。

$\alpha \neq 0$ のときは $\angle PQB \geqq \angle AQB = \angle ABQ \geqq \angle PBQ$ なので

$\triangle PBQ$ において $\angle PQB \geqq \angle PBQ$ である（等号成立は$\beta = 0$のとき）。

したがって $PQ \leqq PB = AB$ となって題意は成り立つ（等号成立は$\beta = 0$のとき）。

[**東京工業大学 1960 年 数学 I 幾何 $\boxed{2}$**]

△ABC の∠B, ∠C の 2 等分線がその外接円と交わる点をそれぞれ P, Q とするとき， BP＝CQ であるという。この三角形はいかなる三角形か。

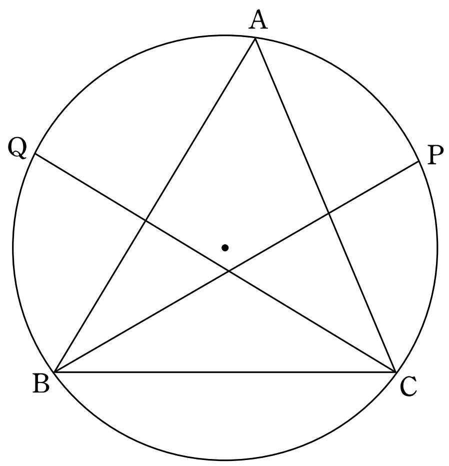
$\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}$ より $\overset{\frown}{\mathrm{BCP}}=\overset{\frown}{\mathrm{QBC}}$ …① または $\overset{\frown}{\mathrm{BCP}}=\overset{\frown}{\mathrm{QAC}}$ …② である。

(ｉ) ①のとき

$\overset{\frown}{\mathrm{CP}}=\overset{\frown}{\mathrm{QB}}$ であるから $\angle\mathrm{CBP}=\angle\mathrm{QCB}$ なので $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ABC}$

よって，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形

逆に， $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ なら $\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}$ である。



(ⅱ) ②のとき

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{QAP}}=\overset{\frown}{\mathrm{QA}}+\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ であるから

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{QCA}+\angle\mathrm{ABP}$$

$$=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BCA}+\frac{1}{2}\angle\mathrm{ABC} \quad \cdots ③$$

また， $\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{ABC}=180^\circ$ …④ であるから

③，④より $3\angle\mathrm{BAC}=180^\circ \Leftrightarrow \angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ となる。

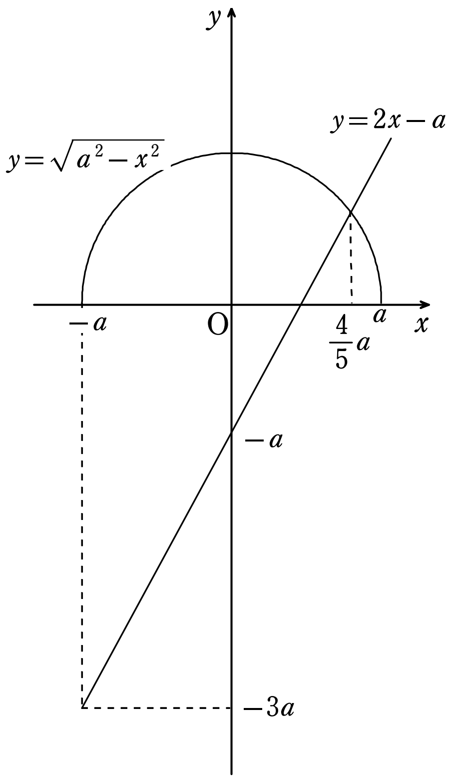
よって $\angle\mathrm{A}=60^\circ$

逆も成り立つ。

(ｉ)，(ⅱ)より「$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形」または「$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ の三角形」

[東京工業大学 1960 年 数学Ⅱ $\boxed{1}$]

$a>0$ のとき，$\sqrt{a^2-x^2} \geqq 2x-a$ を満たす x の範囲で，関数 $y=x+\dfrac{a^2}{x-a}$ の最大値および最小値を求めよ。



$\sqrt{a^2-x^2} \geqq 2x-a$ …① を満たす x の範囲を求める。

$-a \leqq x \leqq a$ であり，

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ は原点中心，半径 a の円の上半分を表し，

$y=2x-a$ は直線を表している。

$2x-a \geqq 0$ すなわち $x \geqq \dfrac{a}{2}$ のもとで

方程式 $\sqrt{a^2-x^2}=2x-a$ を解くと

$$a^2-x^2=4x^2-4ax+a^2 \iff 5x^2-4ax=0$$

$$\iff x(5x-4a)=0$$

よって $x=\dfrac{4}{5}a$

したがって $-a \leqq x \leqq \dfrac{4}{5}a$ …② である。

次に，$y=f(x)=x+\dfrac{a^2}{x-a}$ とおくと $f'(x)=a-\dfrac{a^2}{(x-a)^2}=\dfrac{ax(x-2a)}{(x-a)^2}$ となるので

②の範囲における $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}a$	↗	$-a$	↘	$-\frac{21}{5}a$

よって $f(x)$ の最大値は $f(0)=-a$

最小値は $f\left(\dfrac{4}{5}a\right)=-\dfrac{21}{5}a$

［ 東京工業大学 1960 年 数学Ⅱ $\boxed{2}$ ］

☆ ☆

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が互いに異なる $x_1,\ x_2,\ x_3$ に対して $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ を満たしているとき，$f'(x_2)$ を $x_1,\ x_2,\ x_3$ で表せ。また，$x_1<x_2<x_3$ なるとき，上の結果を用いて $f'(x_2)$ の符号を調べよ。

☆ ☆

$g(x)=f(x)-f(x_1)$ とおくと $g(x)=x^3+ax^2+bx+c-f(x_1)$ …①

仮定より $x_1,\ x_2,\ x_3$ は $g(x)=0$ の相異なる 3 つの解であり，

$g(x)$ の x^3 の係数は 1 だから

$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$ …②

①，②より $\begin{cases} a=-(x_1+x_2+x_3) \\ b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \\ c-f(x_1)=-x_1x_2x_3 \end{cases}$ である。

また，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ であるから

$f'(x_2)=3{x_2}^2-2(x_1+x_2+x_3)x_2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

$={x_2}^2-(x_1+x_3)x_2+x_3x_1$

$=(x_2-x_1)(x_2-x_3)$

であり，$x_1<x_2<x_3$ であるから $f'(x_2)<0$ となる。

[東京工業大学 1960 年 数学Ⅲ $\boxed{1}$]

☆────────────────────────────────────☆

$(n+1)a_n = na_{n+1} + 2a_1$ なる関係を満たす数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

☆────────────────────────────────────☆

$$(n+1)a_n = na_{n+1} + 2a_1 \iff \frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{2a_1}{n(n+1)}$$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = -2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)a_1$$

$\dfrac{a_n}{n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} - b_n = -2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)a_1$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1} - b_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)a_1\right\}$

$$b_n - b_1 = -2a_1\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$b_n - b_1 = -2a_1\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$b_1 = a_1$ であるから $b_n = -a_1 + \dfrac{2a_1}{n}$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}b_n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-a_1 + \frac{2a_1}{n}\right)$$

$$= -a_1$$

[東京工業大学 1960 年 数学Ⅲ $\boxed{2}$]

☆―――☆

$a \leqq x \leqq b \quad (a<b)$ で $f(x)>0$ のとき，$N=\int_a^b f(x)\,dx,\ v(t)=\dfrac{1}{N}\int_a^b (x-t)^2 f(x)\,dx$ とおく。

$v(t)$ を最小にする t の値を M とする。

(1) M を求めよ。

(2) $v(t)-v(M)=(t-M)^2$ であることを示せ。

☆―――☆

(1) $$v(t)=\frac{1}{N}\int_a^b (x-t)^2 f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{N}\int_a^b (x^2-2tx+t^2) f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{N}\left\{\int_a^b x^2 f(x)\,dx-2t\int_a^b xf(x)\,dx+t^2\int_a^b f(x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{N}\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\frac{2t}{N}\int_a^b xf(x)\,dx+t^2$$

$$=\left(t-\frac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2-\left(\frac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2+\frac{1}{N}\int_a^b x^2 f(x)\,dx \quad \cdots①$$

よって，$v(t)$ を最小にする t は $M=\dfrac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx$ である。

(2) $v(M)=-\left(\dfrac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2+\dfrac{1}{N}\int_a^b x^2 f(x)\,dx$ であるから

①より $v(t)=\left(t-\dfrac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2+v(M)$ なので

$$v(t)-v(M)=\left(t-\frac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2$$

$$=(t-M)^2$$ となる。