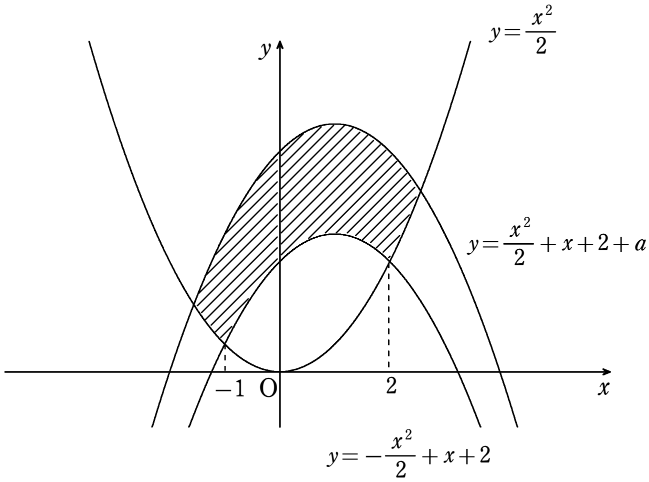
[東京工業大学 1959 年 数学Ⅲ $\boxed{2}$]

$a>0$ とし，3 つの放物線 $y=\dfrac{x^2}{2},\ y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2,\ y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2+a$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{S(a)}{a}$ を求めよ。

$y=\dfrac{x^2}{2}$ …①， $y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2$ …②， $y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2+a$ …③ とおく。

①と②の交点の x 座標を求める。



$$\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+x+2 \iff x^2-x-2=0$$
$$\iff (x-2)(x+1)=0$$
$$\iff x=2,\ -1$$

①と③の交点の x 座標を求める。

$$\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+x+2+a \iff x^2-x-2-a=0 \quad \cdots ④$$

④の 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-2-a$

よって $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=1^2-4(-2-a)$$
$$=4a+9$$

となる。

したがって $\displaystyle S(a)=\int_\alpha^\beta(-x^2+x+2+a)\,dx-\int_{-1}^2(-x^2+x+2)\,dx$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx+\int_{-1}^2(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}\left[\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}-3^3\right]=\frac{1}{6}\left\{(4a+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right\}$$

となる。

よって $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{S(a)}{a}=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{(4a+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}}{a}$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{(4a+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}}{a}\cdot\frac{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}}{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{(4a+9)^{3}-9^{3}}{a\left\{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{64a^{3}+432a^{2}+972a}{a\left\{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{64a^{2}+432a+972}{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{972}{54}$$

$$=3$$