

[東京工業大学 1959 年 数学Ⅲ 1]



$0 < \left| \frac{a}{b} \right| < 1$ のとき, 次の条件を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

$$ax_{n-1} + bx_{n+1} - (a+b)x_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad -ax_0 + bx_1 = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1$$



$$ax_{n-1} + bx_{n+1} - (a+b)x_n = 0 \Leftrightarrow b(x_{n+1} - x_n) = a(x_n - x_{n-1}) \text{ であり,}$$

$$b \neq 0 \text{ より } x_{n+1} - x_n = \frac{a}{b}(x_n - x_{n-1}) = \left(\frac{a}{b}\right)^2(x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = \left(\frac{a}{b}\right)^n(x_1 - x_0)$$

となる。

$$-ax_0 + bx_1 = 0 \text{ より } x_1 = \frac{a}{b}x_0 \text{ から } x_{n+1} - x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b}x_0 - x_0\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0$$

$$= x_0 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$= x_0 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 - \frac{a}{b}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^n x_0 \text{ これは } n=0 \text{ のときも成り立っている。}$$

さらに, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1$ と $0 < \left| \frac{a}{b} \right| < 1$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n x_0 = \frac{x_0}{1 - \frac{a}{b}} = 1 \text{ から } x_0 = 1 - \frac{a}{b}$$

よって $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(1 - \frac{a}{b}\right)$ となる。