[東京工業大学 1959 年 数学 II $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

三次方程式 $20x^3-30x^2+12x-1=0$ は 3 つの実根をもつことを証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=20x^3-30x^2+12x-1$ とおく。

$f(x)=0$ が 3 つの実根を持つための条件は,

（ $f(x)$ の極大値） $\geqq 0$ かつ （ $f(x)$ の極小値） $\leqq 0$

が成り立つときである。

次に, $f(x)$ の極値を調べると

$f'(x)=60x^2-60x+12$ であり, $f'(x)=0$ となるのは

$5x^2-5x+1=0$ より $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}$ のとき。

ここで, $f(x)=20x^3-30x^2+12x-1=(4x-2)(5x^2-5x+1)-2x+1$ と変形できることから

$$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)=-2\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{10}+1=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$$

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)=-2\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{10}+1=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$$

である。 したがって $f(x)=0$ は 3 つの（相異なる）実根をもつ。

[別解] $f(x)=20x^3-30x^2+12x-1$

$$=(2x-1)(10x^2-10x+1)$$

$$=10(2x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)$$

と因数分解できるので, $f(x)=0$ は 3 つの（相異なる）実根をもつ。