

[東京工業大学 1959 年 数学Ⅱ 1]



放物線 $y^2 = 4x$ とただ 1 点を共有し、円 $x^2 + y^2 = 1$ と 1 点または 2 点を共有する直線 $y = mx + h$ の傾きの範囲を求めよ。



$$y^2 = 4x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y = mx + h \quad \dots \textcircled{3}$$

①と③が 1 点だけを共有するのは

(i) 接するとき (ii) $m = 0$ のとき

のいずれかである。

(i) のとき、 $m \neq 0$ であり、①と③が接することから

x の方程式 $(mx + h)^2 = 4x \Leftrightarrow m^2x^2 + (2hm - 4)x + h^2 = 0$ は重解をもつ。

したがって $(hm - 2)^2 - m^2h^2 = 0$ より $h = \frac{1}{m}$

このとき③は $y = mx + \frac{1}{m} \quad \dots \textcircled{3}'$ となり、②と連立して

$$x^2 + \left(mx + \frac{1}{m}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 2x + \frac{1}{m^2} - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

②と③が 1 点または 2 点を共有するのは、④が $1^2 - (1 + m^2)\left(\frac{1}{m^2} - 1\right) \geq 0$ を満たすとき。

よって $m^4 + m^2 - 1 \geq 0$ であり、 $m^2 \geq 0$ から $m^2 \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

したがって $m \leq -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \leq m$ となる。

逆にこのとき、③' は①に接し、②と 1 点または 2 点を共有する。

(ii) のとき、 $-1 \leq h \leq 1$ ならば③は①と 1 点を共有し、②と 2 点で交わるか接する。

以上より、 m の条件は $m = 0, m \leq -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \leq m$

