

[ 東京工業大学 1959 年 数学 I 代数 1 ]



$a, b, c; x, y, z$  はすべての正の数を表すとき、次の不等式を証明せよ。

(1)  $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$

(2)  $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$



(1) 相加・相乗平均の関係式より

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

が成り立つ。等号成立はそれぞれ  $a=b, b=c, c=a$  のとき。

これらを辺々かけて  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  …① を得る。

等号成立は  $a=b=c$  のとき。

(2)

(i)  $y+z-x > 0$  かつ  $z+x-y > 0$  かつ  $x+y-z > 0$  のとき

$$a = \frac{1}{2}(y+z-x), \quad b = \frac{1}{2}(z+x-y), \quad c = \frac{1}{2}(x+y-z) \text{ とおくと,}$$

$a > 0$  かつ  $b > 0$  かつ  $c > 0$  であり  $a+b=z, b+c=x, c+a=y$  であるから

①に代入して  $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$  を得る。

(ii)  $y+z-x, z+x-y, x+y-z$  のうち1つが0以下になるとき

仮に  $y+z-x \leq 0$  であるとすると

$$z+x-y = 2z - (y+z-x) \geq 2z > 0$$

$$x+y-z = 2x - (y+z-x) \geq 2x > 0$$

なので

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq 0$$

となる。 $xyz > 0$  であるので、このとき  $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$  は成り立つ。

他の2つが0以下の場合も同様である。

(ii)の考察より、 $y+z-x, z+x-y, x+y-z$  のうちの2つ、3つが0以下になることはない。

(i), (ii)より題意は示された。