[東京工業大学 1959 年 数学Ⅰ幾何 $\boxed{3}$]

☆──────────────────────────────────────☆

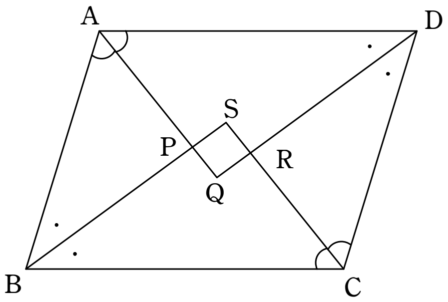
おのおのの内角の二等分線が正方形をつくるような四辺形は，実はどんな四辺形であるか。

☆──────────────────────────────────────☆

四辺形を ABCD とし，$\angle$A の二等分線と $\angle$B の二等分線の交点を P，

同様に他の 2 つの角の二等分線の交点を図のように Q, R, S とする。

$\angle \mathrm{Q}=90^\circ$ であり，$\angle \mathrm{Q}=180^\circ-\left(\dfrac{1}{2}\angle A+\dfrac{1}{2}\angle D\right)$ より $\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{D}=180^\circ$



よって $\mathrm{AB}/\!/\mathrm{CD}$ となる。

同様にして $\mathrm{AD}/\!/\mathrm{BC}$ もわかることから，

四辺形 ABCD は平行四辺形となる。

次に，$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{AD}=b,\ \angle \mathrm{B}=2\theta,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$\mathrm{PQ}=|\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}|$，$\mathrm{AQ}=b\sin\theta$，$\mathrm{AP}=a\sin\theta$ であるから $\mathrm{PQ}=|b-a|\sin\theta$ となる。

同様にして $\mathrm{PS}=|b-a|\cos\theta$ もわかる。

条件より $\mathrm{PQ}=\mathrm{PS}$ なので $|b-a|\sin\theta=|b-a|\cos\theta \iff |b-a|(\sin\theta-\cos\theta)=0$

したがって $b-a=0$ …① または $\sin\theta-\cos\theta=0$ …②

①のとき，$a=b$ となるが，このとき P, Q, R, S は一致するので正方形はできない。

②のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となり，四辺形 ABCD は長方形となる。

したがって，題意を満たす四辺形は「正方形ではない長方形」である。