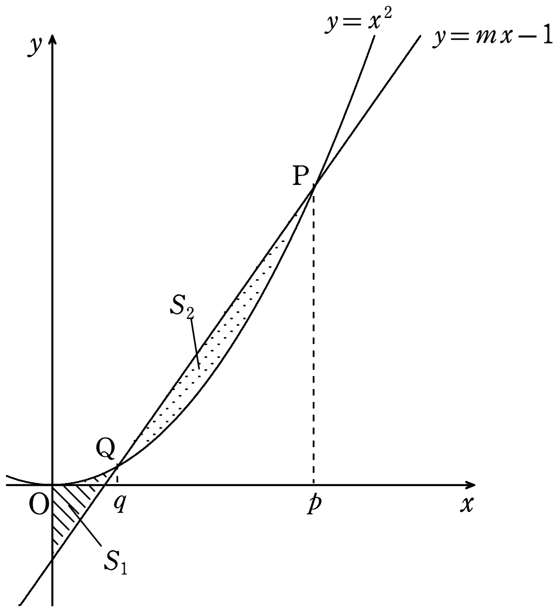
[東京工業大学 1959 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

点 A$(0,\ -1)$ を通る直線が放物線 $y = x^2$ と第一象限の二点 P, Q で交わっている。P, Q の x 座標をそれぞれ $p,\ q\ (p > q)$，原点 O を端点とする放物線の弧 OQ と二つの線分 OA, AQ とで囲まれた部分の面積を S_1，放物線の弧 PQ と線分 PQ とで囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 > S_2$ ならば，$\sqrt{3} > p > q > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であることを示せ。

A$(0,\ -1)$ を通る傾き m の直線は $y = mx - 1$ とおける。

この直線と放物線 $y = x^2$ が第 1 象限の異なる 2 点で交わるのは $m > 2$ のときである。

まず，$S_1 = S_2$ となるときの $p,\ q$ の値を求める。



このとき，$\displaystyle\int_0^p \{x^2 - (mx - 1)\}\,dx = 0$ となるから

$\dfrac{1}{3}p^3 - \dfrac{m}{2}p^2 + p = 0$

$p > 0$ より $m = \dfrac{2p^2 + 6}{3p}$ となる。

直線 $y = \dfrac{2p^2 + 6}{3p}x - 1$ と $y = x^2$ を連立すると

$x^2 = \dfrac{2p^2 + 6}{3p}x - 1 \iff 3px^2 - 2(p^2 + 3)x + 3p = 0$ …①

①の 2 解を $p,\ q$ とおく。

解と係数の関係より $p + q = \dfrac{2(p^2 + 3)}{3p}$，$pq = 1$

これから $3p^2 + 3pq = 2p^2 + 6$ より $p^2 = 3$

$p > 0$ であるから $p = \sqrt{3}$，$q = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。$p = \sqrt{3}$ のとき $m = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ である。

次に，$S_1 > S_2$ のときを考えると，このとき $2 < m < \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ であり，

$S_1 = S_2$ のときよりも P の x 座標は小さく，Q の x 座標は大きくなるので $p < \sqrt{3}$，$q > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

したがって $\sqrt{3} > p > q > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。