**[ 東京工業大学 1959 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$ ]**

☆────────────────────────────────☆

$n$ を正の整数とするとき，次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}-na^{n-1}\right)$

☆────────────────────────────────☆

$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$ であるから

$$\frac{1}{x-a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}-na^{n-1}\right)=\frac{1}{x-a}\left\{(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})-na^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{x-a}\left\{(x^{n-1}-a^{n-1})+(ax^{n-2}-a^{n-1})+\cdots+(a^{n-2}x-a^{n-1})+(a^{n-1}-a^{n-1})\right\}$$

$$=\frac{x^{n-1}-a^{n-1}}{x-a}+a\cdot\frac{x^{n-2}-a^{n-2}}{x-a}+\cdots+a^{n-2}\cdot\frac{x-a}{x-a}$$

ここで， $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ なので

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}-na^{n-1}\right)=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}$$

$$=a^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$$