[東京工業大学 1959 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

$0<\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$ のとき，次の条件を満たす数列$\{x_n\}$の一般項を求めよ。

$$ax_{n-1}+bx_{n+1}-(a+b)x_n=0\quad(n\geqq 1),\ -ax_0+bx_1=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}x_n=1$$

$ax_{n-1}+bx_{n+1}-(a+b)x_n=0 \iff b(x_{n+1}-x_n)=a(x_n-x_{n-1})$ であり，

$b\neq 0$ より $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a}{b}(x_n-x_{n-1})=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2(x_{n-1}-x_{n-2})=\cdots=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n(x_1-x_0)$

となる。

$-ax_0+bx_1=0$ より $x_1=\dfrac{a}{b}x_0$ から $x_{n+1}-x_n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(\dfrac{a}{b}x_0-x_0\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(\dfrac{a}{b}-1\right)x_0$

$n\geqq 1$ のとき $x_n=x_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^k\left(\dfrac{a}{b}-1\right)x_0$

$$=x_0+\left(\frac{a}{b}-1\right)x_0\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$=x_0+\left(\frac{a}{b}-1\right)x_0\cdot\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1-\frac{a}{b}}$$

$=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n x_0$ これは $n=0$ のときも成り立っている。

さらに，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x_n=1$ と $0<\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$ より

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n x_0=\frac{x_0}{1-\frac{a}{b}}=1$ から $x_0=1-\dfrac{a}{b}$

よって $x_n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(1-\dfrac{a}{b}\right)$ となる。