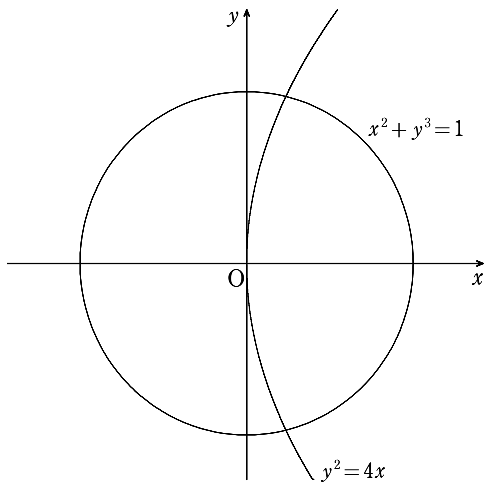
[東京工業大学 1959 年 解析Ⅰ $\boxed{3}$]

☆──────────────────────────☆

放物線 $y^2=4x$ とただ 1 点を共有し, 円 $x^2+y^2=1$ と 1 点または 2 点を共有する直線 $y=mx+h$ の傾きの範囲を求めよ。

☆──────────────────────────☆



$y^2=4x$ …①

$x^2+y^2=1$ …②

$y=mx+h$ …③

①と③が 1 点だけを共有するのは

（ｉ）接するとき （ⅱ）$m=0$ のとき

のいずれかである。

（ｉ）のとき, $m\neq 0$ であり, ①と③が接することから

x の方程式 $(mx+h)^2=4x \Leftrightarrow m^2x^2+(2hm-4)x+h^2=0$ は重解をもつ。

したがって $(hm-2)^2-m^2h^2=0$ より $h=\dfrac{1}{m}$

このとき③は $y=mx+\dfrac{1}{m}$ …③´ となり, ②と連立して

$$x^2+\left(mx+\frac{1}{m}\right)^2=1 \Leftrightarrow (1+m^2)x^2+2x+\frac{1}{m^2}-1=0 \quad \cdots ④$$

②と③が 1 点または 2 点を共有するのは, ④が $1^2-(1+m^2)\left(\dfrac{1}{m^2}-1\right)\geqq 0$ を満たすとき。

よって $m^4+m^2-1\geqq 0$ であり, $m^2\geqq 0$ から $m^2\geqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

したがって $m\leqq-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}},\ \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\leqq m$ となる。

逆にこのとき, ③´は①に接し, ②と 1 点または 2 点を共有する。

(ⅱ)のとき, $-1\leqq h\leqq 1$ ならば③は①と 1 点を共有し, ②と 2 点で交わるか接する。

以上より, m の条件は $m=0,\ m\leqq-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}},\ \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\leqq m$