[東京工業大学 1959 年 解析Ⅰ $\boxed{1}$]

☆ ☆

$a, b, c; x, y, z$ はすべての正の数を表すとき，次の不等式を証明せよ。

⑴ $(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 8abc$

⑵ $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

☆ ☆

⑴ 相加・相乗平均の関係式より

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$， $b+c \geqq 2\sqrt{bc}$， $c+a \geqq 2\sqrt{ca}$

が成り立つ。等号成立はそれぞれ $a=b, b=c, c=a$ のとき。

これらを辺々かけて $(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$ …① を得る。

等号成立は $a=b=c$ のとき。

⑵

(ⅰ) $y+z-x>0$ かつ $z+x-y>0$ かつ $x+y-z>0$ のとき

$a=\dfrac{1}{2}(y+z-x)$， $b=\dfrac{1}{2}(z+x-y)$， $c=\dfrac{1}{2}(x+y-z)$ とおくと，

$a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$ であり $a+b=z, b+c=x, c+a=y$ であるから

①に代入して $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ を得る。

(ⅱ) $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ のうち１つが０以下になるとき

仮に $y+z-x \leqq 0$ であるとすると

$z+x-y=2z-(y+z-x) \geqq 2z>0$

$x+y-z=2x-(y+z-x) \geqq 2x>0$

なので

$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leqq 0$

となる。$xyz>0$ であるので，このとき $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ は成り立つ。

他の２つが０以下の場合も同様である。

(ⅱ)の考察より， $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ のうちの２つ，３つが０以下になることはない。

(ⅰ)，(ⅱ)より題意は示された。