

[東京工業大学 1959 年 解析 I 1]



$a, b, c; x, y, z$ はすべての正の数を表すとき、次の不等式を証明せよ。

(1) $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$

(2) $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$



(1) 相加・相乗平均の関係式より

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

が成り立つ。等号成立はそれぞれ $a=b, b=c, c=a$ のとき。

これらを辺々かけて $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \cdots \textcircled{1}$ を得る。

等号成立は $a=b=c$ のとき。

(2)

(i) $y+z-x > 0$ かつ $z+x-y > 0$ かつ $x+y-z > 0$ のとき

$$a = \frac{1}{2}(y+z-x), \quad b = \frac{1}{2}(z+x-y), \quad c = \frac{1}{2}(x+y-z) \text{ とおくと,}$$

$a > 0$ かつ $b > 0$ かつ $c > 0$ であり $a+b=z, b+c=x, c+a=y$ であるから

①に代入して $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ を得る。

(ii) $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ のうち1つが0以下になるとき

仮に $y+z-x \leq 0$ であるとする

$$z+x-y = 2z - (y+z-x) \geq 2z > 0$$

$$x+y-z = 2x - (y+z-x) \geq 2x > 0$$

なので

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq 0$$

となる。 $xyz > 0$ であるので、このとき $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ は成り立つ。

他の2つが0以下の場合も同様である。

(ii)の考察より、 $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ のうちの2つ、3つが0以下になることはない。

(i), (ii)より題意は示された。

[東京工業大学 1959 年 解析 I 2]



A は甲地を出発して一定の速さで乙地へ向かい、同時に B は乙地を出発して一定の速さで甲地に向かった。A は B と出会ってから 2 時間 30 分後に乙地に到着し、B は A と出会ってから 1 時間 36 分後に甲地に到着した。A、B の時速を求めよ。ただし、甲乙両地間の距離は 18km とする。



A の速度を時速 x km, B の速度を時速 y km とする。

$$A \text{ と } B \text{ が 出 会 う ま で の 時 間 は } \frac{18}{x+y}$$

$$A \text{ が 乙 地 に 着 く ま で の 時 間 は } \frac{18}{x}$$

$$B \text{ が 甲 地 に 着 く ま で の 時 間 は } \frac{18}{y}$$

2 時間 30 分は $\frac{150}{60} = \frac{5}{2}$ 時間, 1 時間 36 分は $\frac{96}{60} = \frac{8}{5}$ 時間であるから

$$\text{条件より } \begin{cases} \frac{18}{x} - \frac{18}{x+y} = \frac{5}{2} \\ \frac{18}{y} - \frac{18}{x+y} = \frac{8}{5} \end{cases} \dots \text{① となる。}$$

$$\text{①の 2 式を辺々かけて } 18^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} \right) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow 81 \left(\frac{y}{x(x+y)} \right) \left(\frac{x}{y(x+y)} \right) = 1$$

よって $(x+y)^2 = 81$ であり, $x+y > 0$ なので $x+y = 9$

このとき①より $x = 4, y = 5$ となる。

したがって A は時速 4 km, B は時速 5 km

[東京工業大学 1959 年 解析 I 3]



放物線 $y^2 = 4x$ とただ 1 点を共有し、円 $x^2 + y^2 = 1$ と 1 点または 2 点を共有する直線 $y = mx + h$ の傾きの範囲を求めよ。



$$y^2 = 4x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y = mx + h \quad \dots \textcircled{3}$$

①と③が 1 点だけを共有するのは

(i) 接するとき (ii) $m = 0$ のとき

のいずれかである。

(i) のとき、 $m \neq 0$ であり、①と③が接することから

x の方程式 $(mx + h)^2 = 4x \Leftrightarrow m^2x^2 + (2hm - 4)x + h^2 = 0$ は重解をもつ。

したがって $(hm - 2)^2 - m^2h^2 = 0$ より $h = \frac{1}{m}$

このとき③は $y = mx + \frac{1}{m} \quad \dots \textcircled{3}'$ となり、②と連立して

$$x^2 + \left(mx + \frac{1}{m} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 2x + \frac{1}{m^2} - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

②と③が 1 点または 2 点を共有するのは、④が $1^2 - (1 + m^2) \left(\frac{1}{m^2} - 1 \right) \geq 0$ を満たすとき。

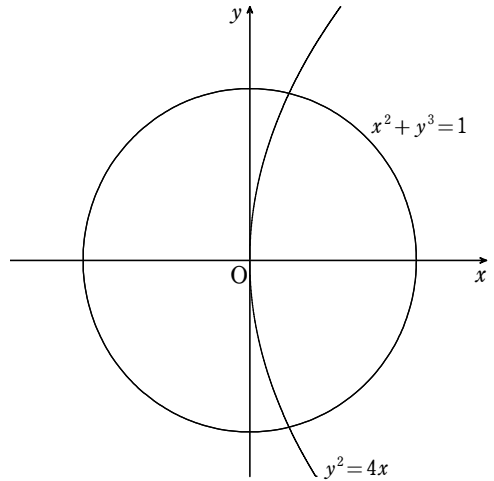
よって $m^4 + m^2 - 1 \geq 0$ であり、 $m^2 \geq 0$ から $m^2 \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

したがって $m \leq -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \leq m$ となる。

逆にこのとき、③' は①に接し、②と 1 点または 2 点を共有する。

(ii) のとき、 $-1 \leq h \leq 1$ ならば③は①と 1 点を共有し、②と 2 点で交わるか接する。

以上より、 m の条件は $m = 0, m \leq -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \leq m$



[東京工業大学 1959 年 解析Ⅱ 1]



$0 < \left| \frac{a}{b} \right| < 1$ のとき、次の条件を満たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

$$ax_{n-1} + bx_{n+1} - (a+b)x_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad -ax_0 + bx_1 = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1$$



$$ax_{n-1} + bx_{n+1} - (a+b)x_n = 0 \Leftrightarrow b(x_{n+1} - x_n) = a(x_n - x_{n-1}) \text{ であり,}$$

$$b \neq 0 \text{ より } x_{n+1} - x_n = \frac{a}{b}(x_n - x_{n-1}) = \left(\frac{a}{b}\right)^2(x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = \left(\frac{a}{b}\right)^n(x_1 - x_0)$$

となる。

$$-ax_0 + bx_1 = 0 \text{ より } x_1 = \frac{a}{b}x_0 \text{ から } x_{n+1} - x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b}x_0 - x_0\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0$$

$$= x_0 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$= x_0 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)x_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 - \frac{a}{b}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^n x_0 \text{ これは } n=0 \text{ のときも成り立っている。}$$

さらに、 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1$ と $0 < \left| \frac{a}{b} \right| < 1$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n x_0 = \frac{x_0}{1 - \frac{a}{b}} = 1 \text{ から } x_0 = 1 - \frac{a}{b}$$

よって $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(1 - \frac{a}{b}\right)$ となる。

[東京工業大学 1959 年 解析Ⅱ 2]



n を正の整数とすると、次の極限值を求めよ。 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1} \right)$



$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-a} \left(\frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1} \right) &= \frac{1}{x-a} \left\{ (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) - na^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{x-a} \left\{ (x^{n-1} - a^{n-1}) + (ax^{n-2} - a^{n-1}) + \dots + (a^{n-2}x - a^{n-1}) + (a^{n-1} - a^{n-1}) \right\} \\ &= \frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x-a} + a \cdot \frac{x^{n-2} - a^{n-2}}{x-a} + \dots + a^{n-2} \cdot \frac{x-a}{x-a} \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$ なるので

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1} \right) &= (n-1)a^{n-2} + (n-2)a^{n-2} + \dots + a^{n-2} \\ &= a^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2} \end{aligned}$$

[東京工業大学 1959 年 解析 II 3]



点 $A(0, -1)$ を通る直線が放物線 $y = x^2$ と第一象限の二点 P, Q で交わっている。 P, Q の x 座標をそれぞれ $p, q (p > q)$, 原点 O を端点とする放物線の弧 OQ と二つの線分 OA, AQ とで囲まれた部分の面積を S_1 , 放物線の弧 PQ と線分 PQ とで囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき, $S_1 > S_2$ ならば, $\sqrt{3} > p > q > \frac{1}{\sqrt{3}}$ であることを示せ。



$A(0, -1)$ を通る傾き m の直線は $y = mx - 1$ とおける。

この直線と放物線 $y = x^2$ が第 1 象限の異なる 2 点で交わるのは $m > 2$ のときである。

まず, $S_1 = S_2$ となるときの p, q の値を求める。

このとき, $\int_0^p \{x^2 - (mx - 1)\} dx = 0$ となるから

$$\frac{1}{3} p^3 - \frac{m}{2} p^2 + p = 0$$

$$p > 0 \text{ より } m = \frac{2p^2 + 6}{3p} \text{ となる。}$$

直線 $y = \frac{2p^2 + 6}{3p} x - 1$ と $y = x^2$ を連立すると

$$x^2 = \frac{2p^2 + 6}{3p} x - 1 \Leftrightarrow 3px^2 - 2(p^2 + 3)x + 3p = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①の 2 解を p, q とおく。

$$\text{解と係数の関係より } p + q = \frac{2(p^2 + 3)}{3p}, \quad pq = 1$$

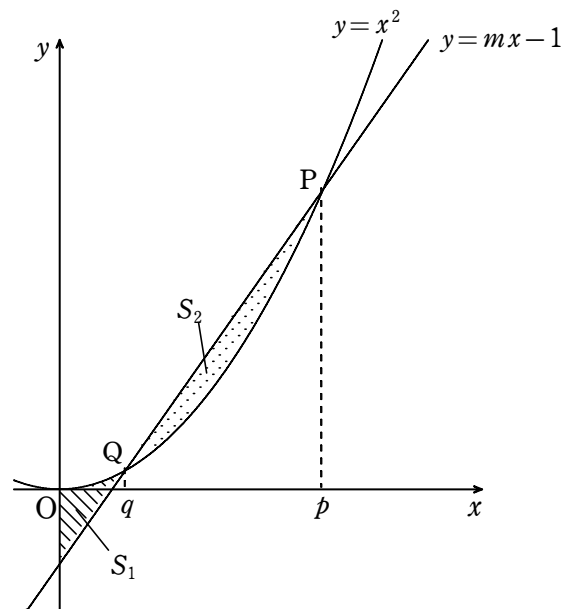
$$\text{これから } 3p^2 + 3pq = 2p^2 + 6 \text{ より } p^2 = 3$$

$$p > 0 \text{ であるから } p = \sqrt{3}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ となる。 } p = \sqrt{3} \text{ のとき } m = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ である。}$$

次に, $S_1 > S_2$ のときを考えると, このとき $2 < m < \frac{4}{\sqrt{3}}$ であり,

$S_1 = S_2$ のときよりも P の x 座標は小さく, Q の x 座標は大きくなるので $p < \sqrt{3}, q > \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

したがって $\sqrt{3} > p > q > \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。



[東京工業大学 1959 年 幾何 1]



直線 $y + 2x = 0$ に関して、円 $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ と対称な円の中心の座標を求めよ。



$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16 \text{ より, 円の中心は } A(3, 1)$$

A と $l: y + 2x = 0$ に関して対称な点を $B(X, Y)$ とおく。

$$l \text{ と } AB \text{ が垂直であることから } \frac{Y-1}{X-3} \cdot (-2) = -1 \text{ より } X - 2Y = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$AB \text{ の中点が } l \text{ 上にあることから } \frac{Y+1}{2} + 2 \cdot \frac{X+3}{2} = 0 \text{ より } 2X + Y = -7 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } X = -\frac{13}{5}, Y = -\frac{9}{5}$$

よって求める円の中心の座標は $\left(-\frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right)$

[東京工業大学 1959 年 幾何 2]



平面上に線分 AB が与えられている。その中点を M とするとき、 $\angle MPB + \angle MAP = 90^\circ$ であるような点 P の軌跡を求めよ。



$\triangle APB$ の外接円と直線 PM との交点を Q とする。

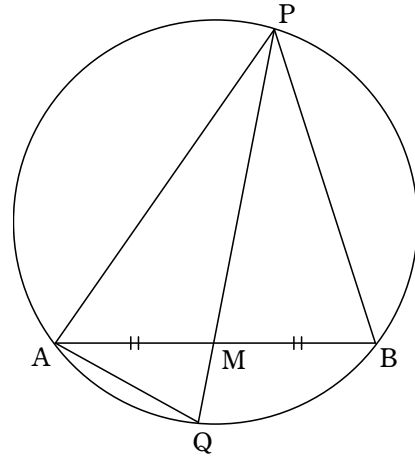
$\angle BPM = \angle MAQ$ であり、

条件 $\angle MPB + \angle MAP = 90^\circ$ より

$\angle PAQ = 90^\circ$ である。

したがって、 PQ はこの外接円の直径であり、

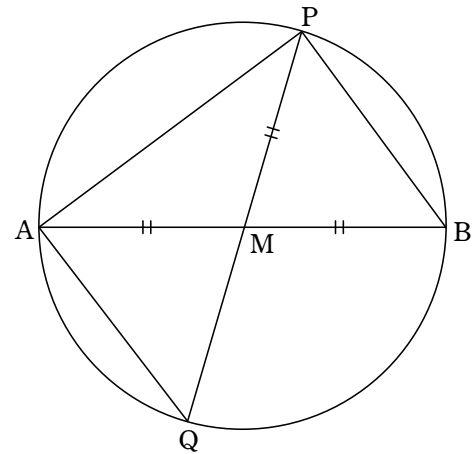
中心は PQ の中点である。



(i) M が外接円の中心と一致するとき

$MP = AM =$ (一定) となるので、

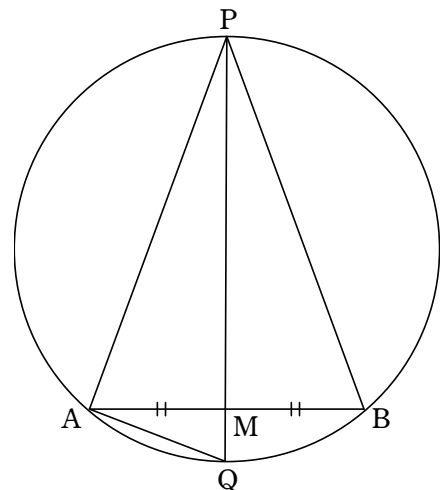
P は AB を直径とする円周上を動く。



(ii) M が外接円の中心と一致しないとき

$PM \perp AB$ となるので、 P は AB を直径とする円の周上にある。

ただし、 P が M と一致する場合を除く。



[東京工業大学 1959 年 数学 I 幾何 3]



おのおのの内角の二等分線が正方形をつくるような四辺形は、実はどんな四辺形であるか。



四辺形を $ABCD$ とし、 $\angle A$ の二等分線と $\angle B$ の二等分線の交点を P 、
同様に他の 2 つの角の二等分線の交点を図のように Q, R, S とする。

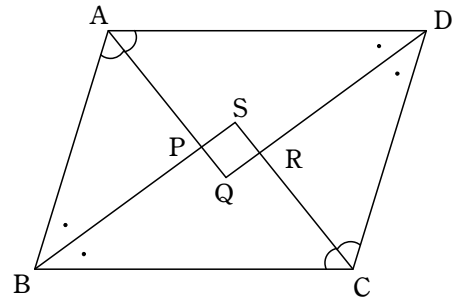
$$\angle Q = 90^\circ \text{ であり, } \angle Q = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle D \right) \text{ より } \angle A + \angle D = 180^\circ$$

よって $AB \parallel CD$ となる。

同様にして $AD \parallel BC$ もわかることから、

四辺形 $ABCD$ は平行四辺形となる。

次に、 $AB = a, AD = b, \angle B = 2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とおくと



$PQ = |AQ - AP|, AQ = b \sin \theta, AP = a \sin \theta$ であるから $PQ = |b - a| \sin \theta$ となる。

同様にして $PS = |b - a| \cos \theta$ もわかる。

条件より $PQ = PS$ なので $|b - a| \sin \theta = |b - a| \cos \theta \Leftrightarrow |b - a| (\sin \theta - \cos \theta) = 0$

したがって $b - a = 0 \dots \textcircled{1}$ または $\sin \theta - \cos \theta = 0 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ のとき、 $a = b$ となるが、このとき P, Q, R, S は一致するので正方形はできない。

$\textcircled{2}$ のとき、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となり、四辺形 $ABCD$ は長方形となる。

したがって、題意を満たす四辺形は「正方形ではない長方形」である。