［ **東京工業大学 1959 年 数学Ⅰ代数 $\boxed{1}$** ］

$a, b, c; x, y, z$ はすべての正の数を表すとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 8abc$

(2) $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

(1) 相加・相乗平均の関係式より

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$， $b+c \geqq 2\sqrt{bc}$， $c+a \geqq 2\sqrt{ca}$

が成り立つ。等号成立はそれぞれ $a=b, b=c, c=a$ のとき。

これらを辺々かけて $(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$ …① を得る。

等号成立は $a=b=c$ のとき。

(2)

(ⅰ) $y+z-x>0$ かつ $z+x-y>0$ かつ $x+y-z>0$ のとき

$a=\dfrac{1}{2}(y+z-x)$， $b=\dfrac{1}{2}(z+x-y)$， $c=\dfrac{1}{2}(x+y-z)$ とおくと，

$a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$ であり $a+b=z, b+c=x, c+a=y$ であるから

①に代入して $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ を得る。

(ⅱ) $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ のうち１つが０以下になるとき

仮に $y+z-x \leqq 0$ であるとすると

$$z+x-y=2z-(y+z-x) \geqq 2z>0$$

$$x+y-z=2x-(y+z-x) \geqq 2x>0$$

なので

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leqq 0$$

となる。$xyz>0$ であるので，このとき $xyz \geqq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ は成り立つ。

他の２つが０以下の場合も同様である。

(ⅱ)の考察より， $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ のうちの２つ，３つが０以下になることはない。

(ⅰ)，(ⅱ)より題意は示された。

[東京工業大学 1959 年 数学Ⅰ代数 $\boxed{2}$]

A は甲地を出発して一定の速さで乙地へ向かい, 同時に B は乙地を出発して一定の速さで甲地に向かった。A は B と出会ってから 2 時間 30 分後に乙地に到着し，B は A と出会ってから 1 時間 36 分後に甲地に到着した。A, B の時速を求めよ。ただし，甲乙両地間の距離は 18km とする。

A の速度を時速 x km，B の速度を時速 y km とする。

A と B が出会うまでの時間は $\dfrac{18}{x+y}$

A が乙地に着くまでの時間は $\dfrac{18}{x}$

B が甲地に着くまでの時間は $\dfrac{18}{y}$

2 時間 30 分は $\dfrac{150}{60}=\dfrac{5}{2}$ 時間，1 時間 36 分は $\dfrac{96}{60}=\dfrac{8}{5}$ 時間であるから

条件より $\begin{cases} \dfrac{18}{x}-\dfrac{18}{x+y}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{18}{y}-\dfrac{18}{x+y}=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ …① となる。

①の 2 式を辺々かけて $18^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}\right)\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+y}\right)=4$

$$\Leftrightarrow\ 81\left(\frac{y}{x(x+y)}\right)\left(\frac{x}{y(x+y)}\right)=1$$

よって $(x+y)^2=81$ であり，$x+y>0$ なので $x+y=9$

このとき①より $x=4,\ y=5$ となる。

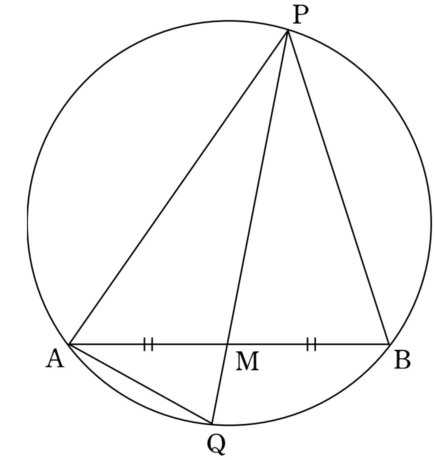
したがって A は時速 4 km，B は時速 5 km

［ 東京工業大学 1959 年 数学Ⅰ幾何 $\boxed{1}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

平面上に線分ABが与えられている。その中点をMとするとき，$\angle MPB+\angle MAP=90^\circ$ であるような点Pの軌跡を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆



△APBの外接円と直線PMとの交点をQとする。

$\angle BPM=\angle MAQ$ であり，

条件 $\angle MPB+\angle MAP=90^\circ$ より

$\angle PAQ=90^\circ$ である。

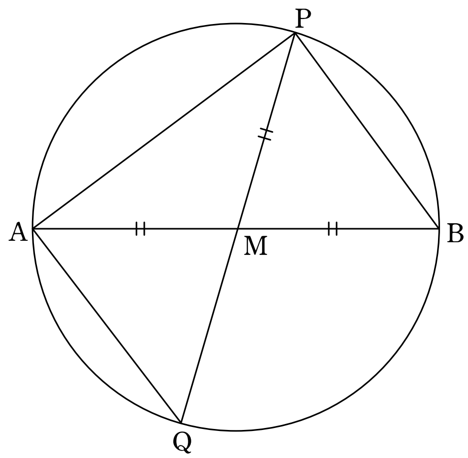
したがって，PQはこの外接円の直径であり，

中心はPQの中点である。

（ⅰ）Mが外接円の中心と一致するとき

$MP=AM=$（一定）となるので，

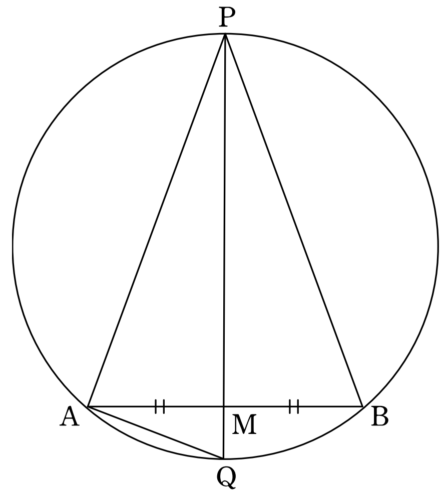
PはABを直径とする円周上を動く。



（ⅱ）Mが外接円の中心と一致しないとき

$PM\perp AB$ となるので，PはABを直径とする円の周上にある。

ただし，PがMと一致する場合を除く。



[東京工業大学 1959 年 数学Ⅰ幾何 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

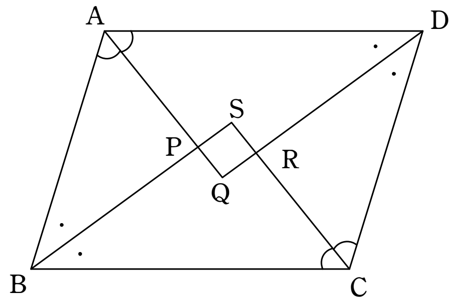
おのおのの内角の二等分線が正方形をつくるような四辺形は，実はどんな四辺形であるか。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

四辺形を ABCD とし，∠A の二等分線と∠B の二等分線の交点を P，

同様に他の 2 つの角の二等分線の交点を図のように Q, R, S とする。

$\angle \mathrm{Q}=90^\circ$ であり，$\angle \mathrm{Q}=180^\circ-\left(\dfrac{1}{2}\angle A+\dfrac{1}{2}\angle D\right)$ より $\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{D}=180^\circ$



よって $\mathrm{AB}/\!/\mathrm{CD}$ となる。

同様にして $\mathrm{AD}/\!/\mathrm{BC}$ もわかることから，

四辺形 ABCD は平行四辺形となる。

次に，$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{AD}=b,\ \angle \mathrm{B}=2\theta,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とおくと

$\mathrm{PQ}=|\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}|$，$\mathrm{AQ}=b\sin\theta$，$\mathrm{AP}=a\sin\theta$ であるから $\mathrm{PQ}=|b-a|\sin\theta$ となる。

同様にして $\mathrm{PS}=|b-a|\cos\theta$ もわかる。

条件より $\mathrm{PQ}=\mathrm{PS}$ なので $|b-a|\sin\theta=|b-a|\cos\theta \iff |b-a|(\sin\theta-\cos\theta)=0$

したがって $b-a=0$ …① または $\sin\theta-\cos\theta=0$ …②

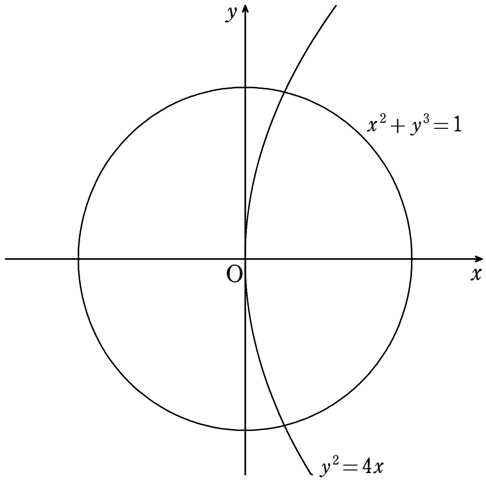
①のとき，$a=b$ となるが，このとき P, Q, R, S は一致するので正方形はできない。

②のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となり，四辺形 ABCD は長方形となる。

したがって，題意を満たす四辺形は「正方形ではない長方形」である。

[東京工業大学 1959 年 数学Ⅱ $\boxed{1}$]

放物線 $y^2=4x$ とただ 1 点を共有し, 円 $x^2+y^2=1$ と 1 点または 2 点を共有する直線 $y=mx+h$ の傾きの範囲を求めよ。



$y^2=4x$ …①

$x^2+y^2=1$ …②

$y=mx+h$ …③

①と③が 1 点だけを共有するのは

（ⅰ）接するとき （ⅱ）$m=0$ のとき

のいずれかである。

（ⅰ）のとき， $m\neq 0$ であり，①と③が接することから

x の方程式 $(mx+h)^2=4x \Leftrightarrow m^2x^2+(2hm-4)x+h^2=0$ は重解をもつ。

したがって $(hm-2)^2-m^2h^2=0$ より $h=\dfrac{1}{m}$

このとき③は $y=mx+\dfrac{1}{m}$ …③´ となり，②と連立して

$$x^2+\left(mx+\frac{1}{m}\right)^2=1 \Leftrightarrow (1+m^2)x^2+2x+\frac{1}{m^2}-1=0 \quad \cdots ④$$

②と③が 1 点または 2 点を共有するのは，④が $1^2-(1+m^2)\left(\dfrac{1}{m^2}-1\right)\geqq 0$ を満たすとき。

よって $m^4+m^2-1\geqq 0$ であり， $m^2\geqq 0$ から $m^2\geqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

したがって $m\leqq -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}},\ \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\leqq m$ となる。

逆にこのとき，③´ は①に接し，②と 1 点または 2 点を共有する。

(ⅱ)のとき， $-1\leqq h\leqq 1$ ならば③は①と 1 点を共有し，②と 2 点で交わるか接する。

以上より， m の条件は $m=0,\ m\leqq -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}},\ \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\leqq m$

[東京工業大学 1959 年 数学 II $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

三次方程式 $20x^3-30x^2+12x-1=0$ は 3 つの実根をもつことを証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=20x^3-30x^2+12x-1$ とおく。

$f(x)=0$ が 3 つの実根を持つための条件は,

（ $f(x)$ の極大値） ≧0 かつ （ $f(x)$ の極小値） ≦0

が成り立つときである。

次に, $f(x)$ の極値を調べると

$f'(x)=60x^2-60x+12$ であり, $f'(x)=0$ となるのは

$5x^2-5x+1=0$ より $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}$ のとき。

ここで, $f(x)=20x^3-30x^2+12x-1=(4x-2)(5x^2-5x+1)-2x+1$ と変形できることから

$$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)=-2\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{10}+1=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$$

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)=-2\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{10}+1=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$$

である。 したがって $f(x)=0$ は 3 つの（相異なる）実根をもつ。

[別解] $f(x)=20x^3-30x^2+12x-1$

$$=(2x-1)(10x^2-10x+1)$$

$$=10(2x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)$$

と因数分解できるので, $f(x)=0$ は 3 つの（相異なる）実根をもつ。

[東京工業大学 1959 年 数学Ⅲ $\boxed{1}$]

☆ ☆

$0<\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$ のとき，次の条件を満たす数列$\{x_n\}$の一般項を求めよ。

$$ax_{n-1}+bx_{n+1}-(a+b)x_n=0 \quad (n\geqq 1),\ -ax_0+bx_1=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}x_n=1$$

☆ ☆

$ax_{n-1}+bx_{n+1}-(a+b)x_n=0 \Leftrightarrow b(x_{n+1}-x_n)=a(x_n-x_{n-1})$ であり，

$b\neq 0$ より $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a}{b}(x_n-x_{n-1})=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2(x_{n-1}-x_{n-2})=\cdots=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n(x_1-x_0)$

となる。

$-ax_0+bx_1=0$ より $x_1=\dfrac{a}{b}x_0$ から $x_{n+1}-x_n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(\dfrac{a}{b}x_0-x_0\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(\dfrac{a}{b}-1\right)x_0$

$n\geqq 1$ のとき $x_n=x_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^k\left(\dfrac{a}{b}-1\right)x_0$

$$=x_0+\left(\frac{a}{b}-1\right)x_0\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$=x_0+\left(\frac{a}{b}-1\right)x_0\cdot\frac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}{1-\dfrac{a}{b}}$$

$=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n x_0$ これは $n=0$ のときも成り立っている。

さらに，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x_n=1$ と $0<\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$ より

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n x_0=\dfrac{x_0}{1-\dfrac{a}{b}}=1$ から $x_0=1-\dfrac{a}{b}$

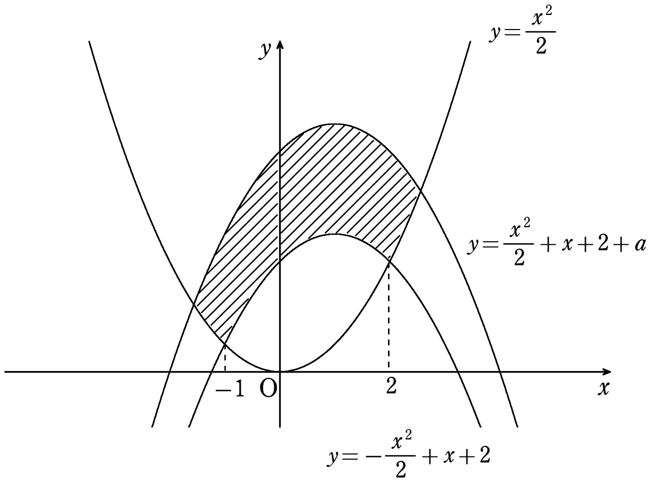
よって $x_n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(1-\dfrac{a}{b}\right)$ となる。

[東京工業大学 1959 年 数学Ⅲ $\boxed{2}$]

$a>0$ とし，3 つの放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2$, $y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2+a$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{S(a)}{a}$ を求めよ。

$y=\dfrac{x^2}{2}$ …①，$y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2$ …②，$y=-\dfrac{x^2}{2}+x+2+a$ …③ とおく。

①と②の交点の x 座標を求める。



$$\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+x+2 \iff x^2-x-2=0$$
$$\iff (x-2)(x+1)=0$$
$$\iff x=2,\ -1$$

①と③の交点の x 座標を求める。

$$\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+x+2+a \iff x^2-x-2-a=0 \quad \cdots④$$

④の 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-2-a$

よって $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=1^2-4(-2-a)$$
$$=4a+9$$

となる。

したがって $\displaystyle S(a)=\int_\alpha^\beta(-x^2+x+2+a)\,dx-\int_{-1}^2(-x^2+x+2)\,dx$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx+\int_{-1}^2(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}\left[\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}-3^3\right]=\frac{1}{6}\left\{(4a+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right\}$$

となる。

よって $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{S(a)}{a}=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{(4a+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}}{a}$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{(4a+9)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}}{a}\cdot\frac{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}}{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{(4a+9)^{3}-9^{3}}{a\left\{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{64a^{3}+432a^{2}+972a}{a\left\{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{a\to 0}\frac{64a^{2}+432a+972}{(4a+9)^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{972}{54}$$

$$=3$$