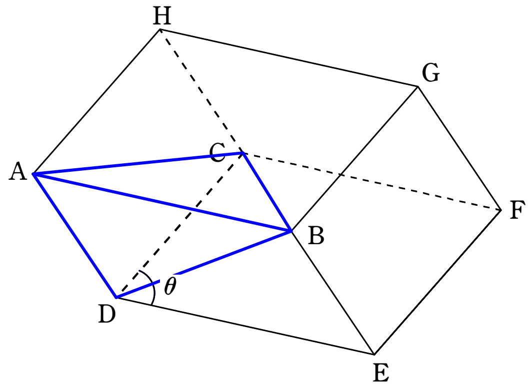
[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{3}$]

空間でねじれの位置にある 2 つの定直線 $g,\ h$ 上にそれぞれ定長の線分 AB, CD をとれば，四面体 ABCD の体積は一定であることを証明せよ。

$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{CD}=b$ とおく。

CD を含み g に平行な平面， AB を含み h に平行な平面，頂点 B を含み四面体の面 ADC に平行な平面, 頂点 C を含み四面体の面 ABD に平行な平面, 平面 ACD および平面 ABD をとることにより, AB, CD がねじれの位置となる平行六面体 ADEB - HCFG を考える。



平行四辺形 DEFC において

$\mathrm{DE}=\mathrm{AB}=a$

$\mathrm{CD}=b$

また， $\angle\mathrm{CDE}=\theta$ は 2 直線 $g,\ h$ のなす角で一定。

よって，（平行四辺形 DEFC の面積） $=ab\sin\theta$ は一定となる。

また，平面 ABGH と平面 CDEF の距離は直線 $g,\ h$ の共通垂線の長さ ℓ で一定。

したがって平行六面体の体積 V は

$V=ab\ell\sin\theta$

であるから,（四面体 ABCD の体積） $=\dfrac{1}{6}V$

となり，これは ABCD の位置に関わらず一定となる。