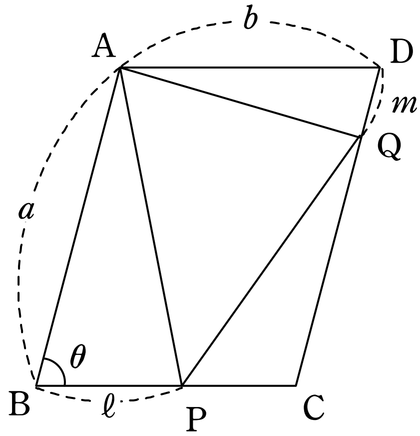
[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{1}$]

平行四辺形ABCDの辺BC, CD上にそれぞれ点P, Qをとるとき，△ABP ≦ △CPQならば，△ABP＋△CPQ ≦ △APQ であることを証明せよ。

$\angle \mathrm{ABC}=\theta \quad (0<\theta<\pi)$ とおき，



$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{AD}=b,\ \mathrm{BP}=\ell,\ \mathrm{DQ}=m$， $\mathrm{BP}=\ell,\ \mathrm{DQ}=m$ とする。

このとき， $\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}a\ell\sin\theta$

$$\mathrm{AQD}=\frac{1}{2}bm\sin\theta$$

$$\mathrm{CQP}=\frac{1}{2}(b-\ell)(a-m)\sin\theta$$

$$\mathrm{ABCD}=ab\sin\theta$$

である。条件 △ABP ≦ △CPQ より $\dfrac{1}{2}a\ell\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}(b-\ell)(a-m)\sin\theta$ であり，

$\sin\theta>0$ であるから $a\ell \leqq (b-\ell)(a-m)$ …①

よって △APQ－（△ABP＋CPQ）

＝（平行四辺形ABCD）－（△ABP＋△CPQ＋△ADQ）－（△ABP＋△CPQ）

＝（平行四辺形ABCD）－（2△ABP＋2△CPQ＋△ADQ）

$$=ab\sin\theta-\left(a\ell\sin\theta+(b-\ell)(a-m)\sin\theta+\frac{1}{2}bm\sin\theta\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}b-\ell\right)m\sin\theta \quad \cdots②$$

ここで，①より $a\ell \leqq (b-\ell)(a-m) \leqq (b-\ell)a$ なので $a\ell \leqq (b-\ell)a$ から $b \geqq 2\ell$

よって ② $\geqq 0$ が成り立つ。

したがって △ABP＋△CPQ ≦ △APQ