[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

関数 $f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|\,dt$ の極大，極小について調べよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(-x)=f(x)$ より $f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

よって $f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|\,dt=2\int_{0}^{1}|t^2-x^2|\,dt$ となる。

（ⅰ）$0\leqq x^2\leqq 1$ すなわち $-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=2\left\{\int_0^{|x|}-(t^2-x^2)\,dt+\int_{|x|}^{1}(t^2-x^2)\,dt\right\}=2\left\{\left[-\frac{1}{3}t^3+x^2t\right]_0^{|x|}+\left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_{|x|}^{1}\right\}$$

$$=2\left(\frac{4}{3}|x|^3-x^2+\frac{1}{3}\right)$$

（ⅱ）$x^2\geqq 1$ すなわち $x\leqq -1,\ 1\leqq x$ のとき

$$f(x)=2\int_0^1-(t^2-x^2)\,dt=2\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

グラフの対称性から $x\geqq 0$ で考えれば十分。

(A) $x=0$ のとき

$$f(0)=\frac{2}{3}$$

(B) $0<x<1$ のとき

$$f(x)=2\left(\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\right) \text{ より } f'(x)=8x^2-4x=4x(2x-1)$$

(C) $x=1$ のとき

$$f(1)=\frac{4}{3}$$

(D) $x>1$ のとき

$$f(x)=2\left(x^2-\frac{1}{3}\right) \text{ より } f'(x)=4x$$

よって $f(x)$ の $x \geqq 0$ における増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

したがって

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき極小値 $\dfrac{1}{2}$ をとり，$x=0$ のとき極大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。