[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

$p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を与えられた定数とし，$q_k=\sum_{i=k+1}^{n} p_i\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ とおく。このとき，

$\mathrm{P}(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x^i$，$\mathrm{Q}(x)=\sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k$ に対して $\mathrm{P}'(1)=\mathrm{Q}(1)$ となることを証明せよ。

$\mathrm{P}(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x^i$ より $\mathrm{P}'(x)=\sum_{i=1}^{n} i\,p_i x^{i-1}$ なので $\mathrm{P}'(1)=\sum_{i=1}^{n} i\,p_i$

また，$\mathrm{Q}(1)=\sum_{k=0}^{n-1} q_k$

$$
\begin{aligned}
&=q_0+q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}\\
&=\sum_{i=1}^{n} p_i+\sum_{i=2}^{n} p_i+\sum_{i=3}^{n} p_i+\cdots+\sum_{i=n}^{n} p_i\\
&=\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)+\left(p_2+p_3+\cdots+p_n\right)+\left(p_3+p_4+\cdots+p_n\right)+\cdots+\left(p_n\right)\\
&=p_1+2p_2+3p_3+\cdots+np_n\\
&=\sum_{i=1}^{n} i\,p_i\\
&=\mathrm{P}'(1)
\end{aligned}
$$

よって $\mathrm{P}'(1)=\mathrm{Q}(1)$