[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x_1, x_2, \cdots; y_1, y_2, \cdots$ のおのおのが 0 または 1 をとるとき，一般に $(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_p, y_p)$ なる組のうちで $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p$ が偶数(0 を含む), 奇数となるものの個数をそれぞれ f_p, g_p とおく。このとき， $f_{p+1}=3f_p+g_p,\ g_{p+1}=f_p+3g_p$ であることを証明せよ。次に，すべての正の整数 n に対して $f_n=2^{n-1}(2^n+1),\ g_n=2^{n-1}(2^n-1)$ となることを示せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p$ から $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p+x_{p+1}y_{p+1}$ になったときの変化を考える。

$(x_{p+1}, y_{p+1})=(0, 0)$,$(1, 0), (0, 1)$ のとき $x_{p+1}y_{p+1}=0$ であり,

この 3 通りのときは $x_{p+1}y_{p+1}$ を加えても偶奇は変わらない。

$(x_{p+1}, y_{p+1})=(1, 1)$ のとき $x_{p+1}y_{p+1}=1$ であり,

このとき $x_{p+1}y_{p+1}$ を加えると偶奇が変わる。

したがって $f_{p+1}=3f_p+g_p,\ g_{p+1}=f_p+3g_p$ となる。

$f_{n+1}=3f_n+g_n$ …①, $g_{n+1}=f_n+3g_n$ …②

とおく。

①+②： $f_{n+1}+g_{n+1}=4(f_n+g_n)$， ①－②： $f_{n+1}-g_{n+1}=2(f_n-g_n)$

であり， $f_1=3,\ g_1=1$ より

$f_n+g_n=4\cdot 4^{n-1}$ …③, $f_n-g_n=2\cdot 2^{n-1}$ …④

（③+④）÷2 より $f_n=\dfrac{4\cdot 4^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}}{2}=2^{2n-1}+2^{n-1}=2^{n-1}\left(2^n+1\right)$

（③－④）÷2 より $g_n=\dfrac{4\cdot 4^{n-1}-2\cdot 2^{n-1}}{2}=2^{2n-1}-2^{n-1}=2^{n-1}\left(2^n-1\right)$

を得る。