[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{2}$]

a, b, c, d は $ad-bc<0$ なる実数であって，$c \neq 0$ とする。このとき，次のことが成り立つことを示せ。

（ｉ）x についての方程式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ は相異なる 2 つの実根をもつ。

（ⅱ）これらの 2 つの実根を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とすれば，

$\alpha<x<\beta$ かつ $x \neq -\dfrac{d}{c}$ のとき，$\dfrac{ax+b}{cx+d}<\alpha$ または $\dfrac{ax+b}{cx+d}>\beta$ である。

（ｉ）$\dfrac{ax+b}{cx+d}=x \iff ax+b=x(cx+d)$ かつ $cx+d \neq 0$

$\iff cx^2+(d-a)x-b=0$ …① かつ $x \neq -\dfrac{d}{c}$

$ad-bc<0$ のとき，①は $x \neq -\dfrac{d}{c}$ を満たしている。

①の判別式を D とすると

$D=(d-a)^2-4c(-b)=a^2-2ad+d^2+4bc$

$ad<bc$ であるから

$D>a^2-2ad+d^2+4ad=(a+d)^2 \geqq 0$

よって x についての方程式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ は相異なる 2 つの実根をもつ。

（ⅱ）$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\dfrac{a}{c}(cx+d)-\dfrac{ad}{c}+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{-ad+bc}{c^2x+cd}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{ad-bc}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$ より

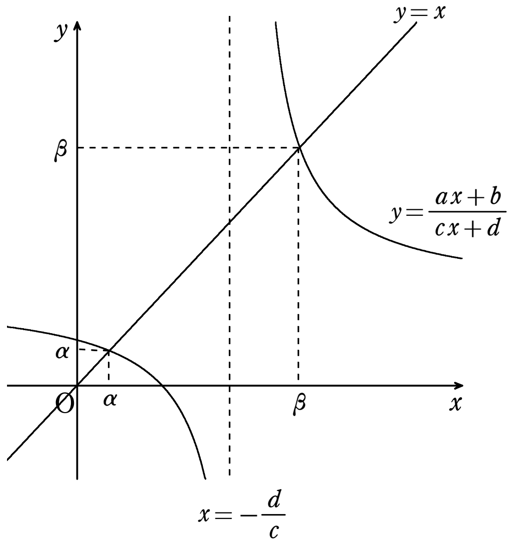
$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は $x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$ を漸近線とする直角双曲線である。

$ad-bc<0$ よりグラフは

「$x>-\dfrac{d}{c}$ かつ $y>\dfrac{a}{c}$」と「$x<-\dfrac{d}{c}$ かつ $y<\dfrac{a}{c}$」の部分に存在する。

この双曲線と直線 $y=x$ との交点の x 座標が α, β である。

よって，グラフは次の図のようになる。



したがって，$\alpha<x<-\dfrac{d}{c}$ において $\dfrac{ax+b}{cx+d}<\alpha$

$-\dfrac{d}{c}<x<\beta$ において $\dfrac{ax+b}{cx+d}>\beta$ が成り立つので題意は示された。