[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{1}$]

---

x の整式 x^3+px^2+qx+r が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるために必要十分な条件は,

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=3\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

であることを証明せよ。

---

x^3+px^2+qx+r を $(x-\alpha)^2$ で割ると,

商が $x+(p+2\alpha)$,余りが $(3\alpha^2+2p\alpha+q)x+r-p\alpha^2-2\alpha^3$ であるから

$$\begin{aligned}x^3+px^2+qx+r&=(x+p+2\alpha)(x-\alpha)^2+(3\alpha^2+2p\alpha+q)x+r-p\alpha^2-2\alpha^3\\&=(x+p+2\alpha)(x-\alpha)^2+(3\alpha^2+2p\alpha+q)x\\&\qquad-\alpha(3\alpha^2+2p\alpha+q)+\alpha(3\alpha^2+2p\alpha+q)+r-p\alpha^2-2\alpha^3\\&=(x+p+2\alpha)(x-\alpha)^2+(3\alpha^2+2p\alpha+q)(x-\alpha)+\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r\end{aligned}$$

よって, x^3+px^2+qx+r が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるための必要十分な条件は

$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=3\alpha^2+2p\alpha+q=0$ である。

[別解のあらすじ]

x の整式 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるための必要十分条件は $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ である。…(*)

よって $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ とおくと

$f(\alpha)=\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r$, $f'(\alpha)=3\alpha^2+2p\alpha+q$ となるから

題意は成り立つ。

※(*)についてはこの問題では自明としない方がよいかもしれない。