[東京工業大学 1958 年 解析Ｉ $\boxed{1}$]

☆

x の整式 x^3+px^2+qx+r が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるために必要十分な条件は,

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=3\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

であることを証明せよ。

☆

x^3+px^2+qx+r を $(x-\alpha)^2$ で割ると,

商が $x+(p+2\alpha)$, 余りが $(3\alpha^2+2p\alpha+q)x+r-p\alpha^2-2\alpha^3$ であるから

$$\begin{aligned}x^3+px^2+qx+r&=(x+p+2\alpha)(x-\alpha)^2+(3\alpha^2+2p\alpha+q)x+r-p\alpha^2-2\alpha^3\\&=(x+p+2\alpha)(x-\alpha)^2+(3\alpha^2+2p\alpha+q)x\\&\qquad-\alpha(3\alpha^2+2p\alpha+q)+\alpha(3\alpha^2+2p\alpha+q)+r-p\alpha^2-2\alpha^3\\&=(x+p+2\alpha)(x-\alpha)^2+(3\alpha^2+2p\alpha+q)(x-\alpha)+\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r\end{aligned}$$

よって, x^3+px^2+qx+r が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるための必要十分な条件は

$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=3\alpha^2+2p\alpha+q=0$ である。

[別解のあらすじ]

x の整式 $f(x)$ が $\left(x-\alpha\right)^2$ で割り切れるための必要十分条件は $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ である。…（＊）

よって $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ とおくと

$f(\alpha)=\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r$, $f'(\alpha)=3\alpha^2+2p\alpha+q$ となるから

題意は成り立つ。

※（＊）についてはこの問題では自明としない方がよいかもしれない。

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{2}$]

a, b, c, d は $ad-bc<0$ なる実数であって，$c\neq 0$ とする。このとき，次のことが成り立つことを示せ。

（ⅰ）x についての方程式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ は相異なる 2 つの実根をもつ。

（ⅱ）これらの 2 つの実根を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とすれば，

$\alpha<x<\beta$ かつ $x\neq -\dfrac{d}{c}$ のとき，$\dfrac{ax+b}{cx+d}<\alpha$ または $\dfrac{ax+b}{cx+d}>\beta$ である。

（ⅰ）$\dfrac{ax+b}{cx+d}=x \iff ax+b=x(cx+d)$ かつ $cx+d\neq 0$

$\iff cx^2+(d-a)x-b=0$ …① かつ $x\neq -\dfrac{d}{c}$

$ad-bc<0$ のとき，①は $x\neq -\dfrac{d}{c}$ を満たしている。

①の判別式を D とすると

$D=(d-a)^2-4c(-b)=a^2-2ad+d^2+4bc$

$ad<bc$ であるから

$D>a^2-2ad+d^2+4ad=(a+d)^2 \geqq 0$

よって x についての方程式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ は相異なる 2 つの実根をもつ。

（ⅱ）$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{-ad+bc}{c^2x+cd}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{ad-bc}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}$ より

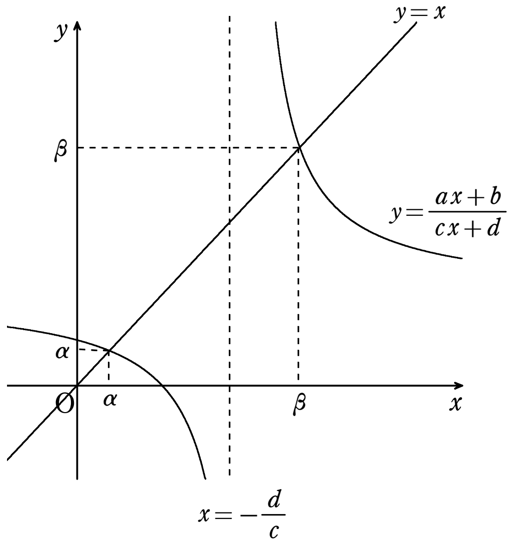
$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は $x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$ を漸近線とする直角双曲線である。

$ad-bc<0$ よりグラフは

「$x>-\dfrac{d}{c}$ かつ $y>\dfrac{a}{c}$」と「$x<-\dfrac{d}{c}$ かつ $y<\dfrac{a}{c}$」の部分に存在する。

この双曲線と直線 $y=x$ との交点の x 座標が α, β である。

よって，グラフは次の図のようになる。



したがって，$\alpha<x<-\dfrac{d}{c}$ において $\dfrac{ax+b}{cx+d}<\alpha$

$-\dfrac{d}{c}<x<\beta$ において $\dfrac{ax+b}{cx+d}>\beta$ が成り立つので題意は示された。

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{3}$]

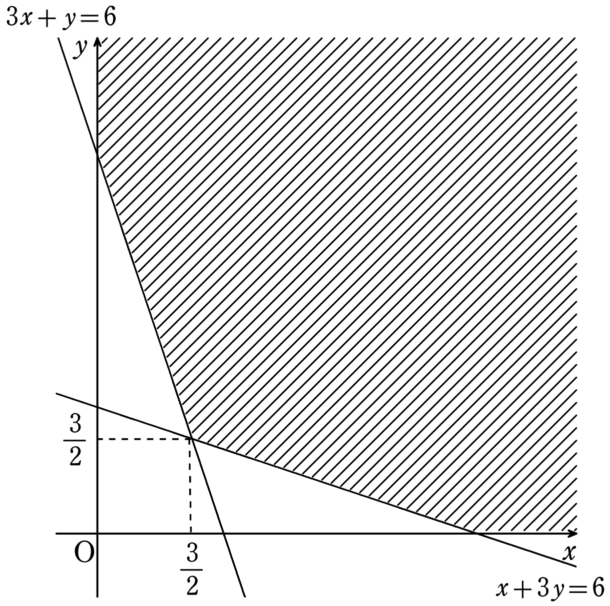
☆ ☆

$x,\ y$ が $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+3y \geqq 6,\ 3x+y \geqq 6$ で表される範囲を動くとき，$x+2y$ の最小値およびそれを与える $x,\ y$ の値を求めよ。

☆ ☆

$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+3y \geqq 6,\ 3x+y \geqq 6$ …① を xy 平面に図示すると次の図の斜線部分になる。

ただし，境界線も含む。



$x+2y=k$ とおくと $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$ であり，この直線と①とが共有点をもつような k の最小値を求めればよい。それは，点$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$を通るときであるから

求める最小値は $\dfrac{9}{2}\ \left(x=y=\dfrac{3}{2}\right)$

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

☆―――☆

$x_1, x_2, \cdots; y_1, y_2, \cdots$ のおのおのが 0 または 1 をとるとき，一般に $(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_p, y_p)$ なる組のうちで $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p$ が偶数（0 を含む），奇数となるものの個数をそれぞれ f_p, g_p とおく。このとき，$f_{p+1}=3f_p+g_p,\ g_{p+1}=f_p+3g_p$ であることを証明せよ。次に，すべての正の整数 n に対して $f_n=2^{n-1}(2^n+1),\ g_n=2^{n-1}(2^n-1)$ となることを示せ。

☆―――☆

$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p$ から $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p+x_{p+1}y_{p+1}$ になったときの変化を考える。

$(x_{p+1}, y_{p+1})=(0, 0)$,$(1, 0), (0, 1)$ のとき $x_{p+1}y_{p+1}=0$ であり，

この 3 通りのときは $x_{p+1}y_{p+1}$ を加えても偶奇は変わらない。

$(x_{p+1}, y_{p+1})=(1, 1)$ のとき $x_{p+1}y_{p+1}=1$ であり，

このとき $x_{p+1}y_{p+1}$ を加えると偶奇が変わる。

したがって $f_{p+1}=3f_p+g_p,\ g_{p+1}=f_p+3g_p$ となる。

$f_{n+1}=3f_n+g_n$ …①， $g_{n+1}=f_n+3g_n$ …②

とおく。

①＋②： $f_{n+1}+g_{n+1}=4(f_n+g_n)$， ①－②： $f_{n+1}-g_{n+1}=2(f_n-g_n)$

であり， $f_1=3,\ g_1=1$ より

$f_n+g_n=4\cdot 4^{n-1}$ …③， $f_n-g_n=2\cdot 2^{n-1}$ …④

（③＋④）÷2 より $f_n=\dfrac{4\cdot 4^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}}{2}=2^{2n-1}+2^{n-1}=2^{n-1}\left(2^n+1\right)$

（③－④）÷2 より $g_n=\dfrac{4\cdot 4^{n-1}-2\cdot 2^{n-1}}{2}=2^{2n-1}-2^{n-1}=2^{n-1}\left(2^n-1\right)$

を得る。

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を与えられた定数とし，$q_k=\sum_{i=k+1}^{n}p_i\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ とおく。このとき，

$\mathrm{P}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_ix^i$，$\mathrm{Q}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}q_kx^k$ に対して $\mathrm{P}'(1)=\mathrm{Q}(1)$ となることを証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\mathrm{P}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_ix^i$ より $\mathrm{P}'(x)=\sum_{i=1}^{n}i\,p_ix^{i-1}$ なので $\mathrm{P}'(1)=\sum_{i=1}^{n}i\,p_i$

また，$\mathrm{Q}(1)=\sum_{k=0}^{n-1}q_k$

$$=q_0+q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i+\sum_{i=2}^{n}p_i+\sum_{i=3}^{n}p_i+\cdots+\sum_{i=n}^{n}p_i$$

$$=\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)+\left(p_2+p_3+\cdots+p_n\right)+\left(p_3+p_4+\cdots+p_n\right)+\cdots+\left(p_n\right)$$

$$=p_1+2p_2+3p_3+\cdots+np_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i\,p_i$$

$$=\mathrm{P}'(1)$$

よって $\mathrm{P}'(1)=\mathrm{Q}(1)$

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

☆ ☆

関数 $f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|\,dt$ の極大，極小について調べよ。

☆ ☆

$f(-x)=f(x)$ より $f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

よって $f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|\,dt=2\int_{0}^{1}|t^2-x^2|\,dt$ となる。

（ⅰ）$0\leqq x^2\leqq 1$ すなわち $-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=2\left\{\int_0^{|x|}-(t^2-x^2)\,dt+\int_{|x|}^{1}(t^2-x^2)\,dt\right\}=2\left\{\left[-\frac{1}{3}t^3+x^2t\right]_0^{|x|}+\left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_{|x|}^{1}\right\}$$

$$=2\left(\frac{4}{3}|x|^3-x^2+\frac{1}{3}\right)$$

（ⅱ）$x^2\geqq 1$ すなわち $x\leqq -1,\ 1\leqq x$ のとき

$$f(x)=2\int_0^1-(t^2-x^2)\,dt=2\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

グラフの対称性から $x\geqq 0$ で考えれば十分。

(A) $x=0$ のとき

$$f(0)=\frac{2}{3}$$

(B) $0<x<1$ のとき

$$f(x)=2\left(\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\right) \text{ より } f'(x)=8x^2-4x=4x(2x-1)$$

(C) $x=1$ のとき

$$f(1)=\frac{4}{3}$$

(D) $x>1$ のとき

$$f(x)=2\left(x^2-\frac{1}{3}\right) \text{ より } f'(x)=4x$$

よって $f(x)$ の $x \geqq 0$ における増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

したがって

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき極小値 $\dfrac{1}{2}$ をとり，$x=0$ のとき極大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。

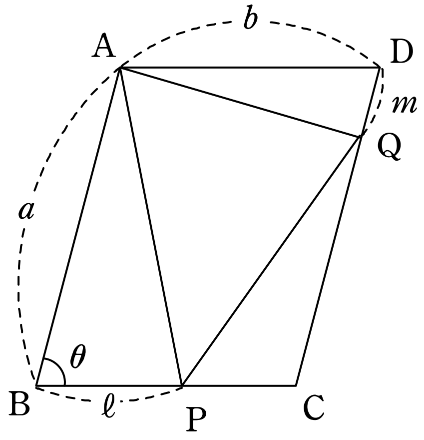
[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{1}$]

☆ ☆

平行四辺形ABCDの辺BC, CD上にそれぞれ点P, Qをとるとき，△ABP ≦ △CPQならば,

△ABP＋△CPQ ≦ △APQ であることを証明せよ。

☆ ☆



$\angle ABC = \theta \quad (0 < \theta < \pi)$ とおき，

$AB = a,\ AD = b,\ BP = \ell,\ DQ = m$， $BP = \ell,\ DQ = m$ とする。

このとき， $ABP = \dfrac{1}{2}a\ell\sin\theta$

$AQD = \dfrac{1}{2}bm\sin\theta$

$CQP = \dfrac{1}{2}(b-\ell)(a-m)\sin\theta$

$ABCD = ab\sin\theta$

である。条件 △ABP ≦ △CPQ より $\dfrac{1}{2}a\ell\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}(b-\ell)(a-m)\sin\theta$ であり，

$\sin\theta > 0$ であるから $a\ell \leqq (b-\ell)(a-m)$ …①

よって △APQ－（△ABP＋CPQ）

＝（平行四辺形ABCD）－（△ABP＋△CPQ＋△ADQ）－（△ABP＋△CPQ）

＝（平行四辺形ABCD）－（2△ABP＋2△CPQ＋△ADQ）

$$= ab\sin\theta - \left(a\ell\sin\theta + (b-\ell)(a-m)\sin\theta + \frac{1}{2}bm\sin\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}b - \ell\right)m\sin\theta \quad \cdots②$$

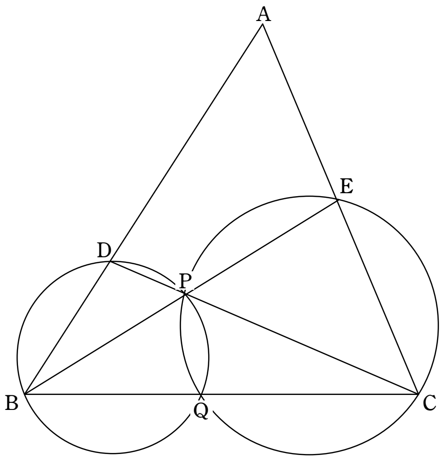
ここで，①より $a\ell \leqq (b-\ell)(a-m) \leqq (b-\ell)a$ なので $a\ell \leqq (b-\ell)a$ から $b \geqq 2\ell$

よって ② $\geqq 0$ が成り立つ。

したがって △ABP＋△CPQ ≦ △APQ

[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{2}$]

4 直線が交わって 4 つの三角形ができているとき，それらの外接円はことごとく同一の点を通ることを証明せよ。



4 直線 AB, AC, BE, CD が交わってできる 4 つの三角形を

△ABE，△ACD，△BPD，△CPE

とする。

△PBD と△PCE の外接円の交点を Q とする。

このとき，$\angle \mathrm{CEQ} = \angle \mathrm{CPQ} = \angle \mathrm{QBD}$ が成り立つから

$\angle \mathrm{CEQ} = \angle \mathrm{QBA}$ となり，

4 点 A, B, Q, E は同一円周上にあるので△ABE の外接円は Q を通る。

同様にして，△ADC の外接円も Q を通る。

他の 2 つの三角形も Q を通るので，4 つの三角形の外接円はいずれも点 Q を通る。

[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{3}$]

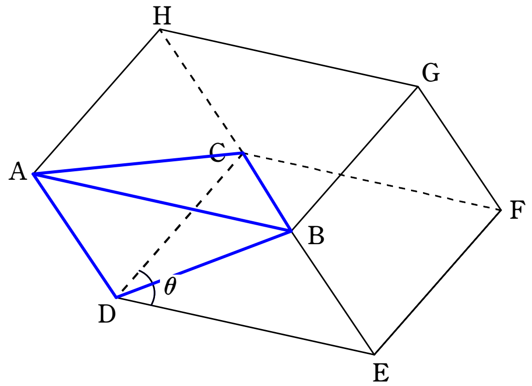
☆ ☆

空間でねじれの位置にある 2 つの定直線 $g,\ h$ 上にそれぞれ定長の線分 AB, CD をとれば，四面体 ABCD の体積は一定であることを証明せよ。

☆ ☆

$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{CD}=b$ とおく。

CD を含み g に平行な平面， AB を含み h に平行な平面，頂点 B を含み四面体の面 ADC に平行な平面，頂点 C を含み四面体の面 ABD に平行な平面，平面 ACD および平面 ABD をとることにより，AB, CD がねじれの位置となる平行六面体 ADEB-HCFG を考える。



平行四辺形 DEFC において

$\mathrm{DE}=\mathrm{AB}=a$

$\mathrm{CD}=b$

また， $\angle\mathrm{CDE}=\theta$ は 2 直線 $g,\ h$ のなす角で一定。

よって，（平行四辺形 DEFC の面積） $=ab\sin\theta$ は一定となる。

また，平面 ABGH と平面 CDEF の距離は直線 $g,\ h$ の共通垂線の長さ ℓ で一定。

したがって平行六面体の体積 V は

$V=ab\ell\sin\theta$

であるから，（四面体 ABCD の体積） $=\dfrac{1}{6}V$

となり，これは ABCD の位置に関わらず一定となる。