[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{1}$]

x の整式 x^3+px^2+qx+r が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるために必要十分な条件は,

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=3\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

であることを証明せよ。

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

a, b, c, d は $ad-bc<0$ なる実数であって，$c \neq 0$ とする。このとき，次のことが成り立つことを示せ。

（ｉ）x についての方程式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ は相異なる 2 つの実根をもつ。

（ⅱ）これらの 2 つの実根を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とすれば，

$$\alpha<x<\beta \text{ かつ } x \neq -\frac{d}{c} \text{ のとき，} \frac{ax+b}{cx+d}<\alpha \text{ または } \frac{ax+b}{cx+d}>\beta \text{ である。}$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅰ $\boxed{3}$]

☆ ☆

$x,\ y$ が $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+3y \geqq 6,\ 3x+y \geqq 6$ で表される範囲を動くとき，$x+2y$ の最小値およびそれを与える $x,\ y$ の値を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

$x_1, x_2, \cdots; y_1, y_2, \cdots$ のおのおのが 0 または 1 をとるとき，一般に $(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_p, y_p)$ なる組のうちで $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p$ が偶数（0 を含む），奇数となるものの個数をそれぞれ f_p, g_p とおく。このとき，$f_{p+1} = 3f_p + g_p,\ g_{p+1} = f_p + 3g_p$ であることを証明せよ。次に，すべての正の整数 n に対して $f_n = 2^{n-1}(2^n + 1),\ g_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$ となることを示せ。

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

$p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を与えられた定数とし, $q_k=\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} p_i\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ とおく。このとき, $\mathrm{P}(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x^i$, $\mathrm{Q}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k$ に対して $\mathrm{P}'(1)=\mathrm{Q}(1)$ となることを証明せよ。

[東京工業大学 1958 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

関数 $f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|\,dt$ の極大，極小について調べよ。

[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{1}$]

☆ ☆

平行四辺形 ABCD の辺 BC, CD 上にそれぞれ点 P, Q をとるとき，$\triangle \mathrm{ABP} \leqq \triangle \mathrm{CPQ}$ ならば，$\triangle \mathrm{ABP} + \triangle \mathrm{CPQ} \leqq \triangle \mathrm{APQ}$ であることを証明せよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{2}$]

☆ ☆

4 直線が交わって 4 つの三角形ができているとき，それらの外接円はことごとく同一の点を通ることを証明せよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1958 年 幾何 $\boxed{3}$]

☆ ☆

空間でねじれの位置にある 2 つの定直線 g, h 上にそれぞれ定長の線分 AB, CD をとれば，四面体 ABCD の体積は一定であることを証明せよ。

☆ ☆