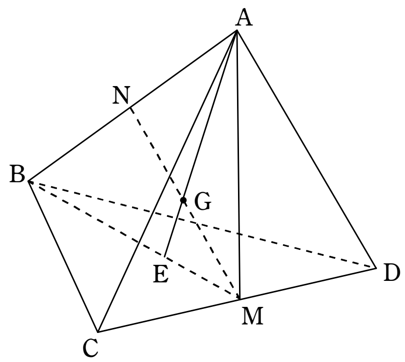
[東京工業大学 1957年 幾何 $\boxed{3}$]

四面体の稜とこれに対する稜の中点とで定まる平面は，ことごとく，1点を共有することを示せ。



図のように四面体ABCDをとり

CD，ABの中点をM，Nとおく。

さらに，底面の△BCDの重心をEとする。

AEを3:1に内分する点をGとすると，

このGが共有する1点であることを示す。

（i）「Aを通る稜とその対する稜の中点を通る平面はAEを含むこと」

稜ABとMを通る平面がAEを含むことを示す。

平面ABMはAを含み，Eは△BCDの重心であるからBMはEを通る。

したがって，平面ABMはAEを含む。

（ii）「Aを通らない稜とその対する稜の中点で定まる平面はAEとGで交わること」

稜CDとNを通る平面がAEとGで交わることを示す。

NMがAEとGで交わることを示せばよいが，

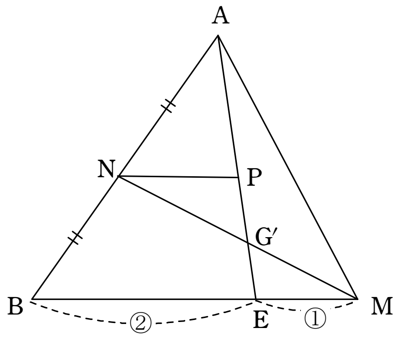
AEとMNの交点をG′，AEの中点をPとすると

$\mathrm{NP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE} = \mathrm{EM}$ より

$\triangle \mathrm{G'NP} \equiv \triangle \mathrm{G'ME}$

よって $\mathrm{PG'} = \mathrm{EG'}$ から $\mathrm{AG'} : \mathrm{G'E} = 3:1$

すなわちGとG′は一致する。



（i），（ii）より，任意の稜とそれに対する稜の中点が定める平面はGを通る。