[東京工業大学 1957 年 幾何 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

正三角形ABCの外接円の任意の 1 点をPとするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ は $6R^2$ に等しいことを証明せよ。ただし R は外接円の半径を表す。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

座標を設定して考える。

$$\mathrm{A}(R,\ 0),\quad \mathrm{B}\left(R\cos\frac{2}{3}\pi,\ R\sin\frac{2}{3}\pi\right),\quad \mathrm{C}\left(R\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right),\ R\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right),\quad \mathrm{P}(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2 &= (R-R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2+\left(R\cos\theta-R\cos\frac{2}{3}\pi\right)^2+\left(R\sin\theta-R\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2\\
&\qquad +\left(R\cos\theta-R\cos\frac{2}{3}\pi\right)^2+\left(R\sin\theta+R\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2\\
&= R^2\left\{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\left(\cos^2\theta+\cos\theta+\frac{1}{4}\right)+2\left(\sin^2\theta+\frac{3}{4}\right)\right\}\\
&= 6R^2
\end{aligned}$$

よって示された。