[東京工業大学 1957 年 幾何 $\boxed{1}$]

与えられた円の 1 点 A から直径 AB および接線 AT を引く。接線 AT 上の 1 点 T から第 2 の接線 TS を引き，その接点 S から AB に垂線 SM を引く。このとき，線分 SM は TB によって 2 等分されることを証明せよ。

AB の中点を原点， B $(a, 0)$ とする。

$\angle \mathrm{SOB} = \theta$ とすると， $\mathrm{S}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ であり，

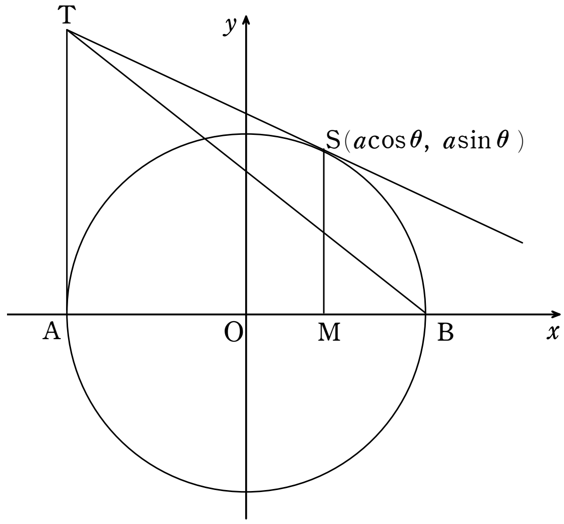
S における接線は $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = a$ …① となる。

さらに $\mathrm{A}(-a, 0)$ であり，①より $\mathrm{T}\left(-a,\ \dfrac{a + a\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ となる。

したがって，直線 TB の方程式は

$$y = \frac{-\dfrac{a + a\cos\theta}{\sin\theta}}{a - (-a)}(x - a) = -\frac{1 + \cos\theta}{2\sin\theta}(x - a) \quad \cdots②$$

となる。



線分 SM と②との交点の y 座標は

$$-\frac{1 + \cos\theta}{2\sin\theta}(a\cos\theta - a) = \frac{1}{2}a\sin\theta$$

となる。

よって，線分 SM は TB によって 2 等分される。