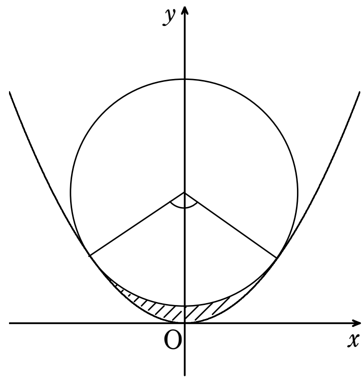
[東京工業大学 1957 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

中心が y 軸上にありしかも x 軸と交わらない半径 1 の円が放物線 $y=x^2$ と 2 点を共有している。この円の下方の弧とこの放物線とが囲む図形を F とする。



(1) F を見込むこの円の中心角はいくらか。

(2) F の面積はいくらか。

---

(1) 題意の円の中心を $(0,\ a)$ とすると，円の方程式は $x^2+(y-a)^2=1$ とおける。

これと $y=x^2$ を連立して $y+(y-a)^2=1 \Leftrightarrow y^2+(-2a+1)y+a^2-1=0$ …①

①の判別式を D とすると，円と放物線が接することから

$$D=(-2a+1)^2-4(a^2-1)=-4a+5=0$$

よって $a=\dfrac{5}{4}$ となる。このとき，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\dfrac{3}{4}$ である。

題意の中心角を θ（$0<\theta<\pi$）とおくと

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

より $\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

(2) 求める面積を S とする。対称性を考えると，第 1 象限にある部分の面積を 2 倍すればよい。

台形から「扇形」と「放物線と x 軸とで囲む部分」を引くと考えて

$$\frac{1}{2}S=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}$$

よって $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$