[東京工業大学 1957 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

$g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$，$f(x)=g(x+1)-g(x)$ なるとき，次の無限級数の和を求めよ。

$f(x)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots\cdots$

$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x-k)$ とおく。

$f(x-k)=g(x-k+1)-g(x-k)$ であるから

$$
\begin{aligned}
S_n(x)&=\sum_{k=0}^{n} f(x-k)\\
&=\sum_{k=0}^{n} g(x-k+1)-\sum_{k=0}^{n} g(x-k)\\
&=\left\{g(x+1)+g(x)+\cdots+g(1)\right\}-\left\{g(x)+g(x-1)+\cdots+g(x-n)\right\}\\
&=g(x+1)-g(x-n)\\
&=\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1+|x-n|}
\end{aligned}
$$

となる。

$n\to\infty$ のときを考えるので $|x-n|=-(x-n)$ としてよく，

このとき， $f(x)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots\cdots=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1+|x-n|}\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1-x+n}\right\}\\
&=\frac{x+1}{1+|x+1|}+1
\end{aligned}
$$