[東京工業大学 1957 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

---

(1) xを正数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$(1+x)^n \geqq 1+nx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt[2n]{n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

---

(1) $n=1$のとき， $(1+x)^1 \geqq 1+1\cdot x$ となって等号が成立する。

$n \geqq 2$のとき，二項定理より

$$(1+x)^n = 1+{}_n\mathrm{C}_1 x+\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k$$

となるが， $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k > 0$ であるから $(1+x)^n > 1+{}_n\mathrm{C}_1 x = 1+nx$ となって成立する。

以上より，題意は示された。

(2) (1)の結果において $x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とすると

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqq 1+n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} > \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$$

を得る。

したがって $1+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > n^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{n}$ となる。

(3) $n \geqq 1$ なので $\sqrt[n]{n} \geqq 1$ であり，(2)から $1 \leqq \sqrt[n]{n} < \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ である。

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$