[東京工業大学 1957 年 解析Ⅰ $\boxed{3}$]

⑴ $n+(-1)^n>A$ であるような n の最小な非負の整数値は $a+1-\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}$ で与えられることを示せ。ただし，A は与えられた正数，a は A を超えない最大の整数とする。

⑵ $a,\ b$ を正数とするとき，$\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ と $\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ との大小を比較せよ。

⑴ 題意より $a \leqq A < a+1$ …① である。

また，$n_0=a+1-\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}$ とおく。

（ⅰ）n_0 が非負の整数値であることを示す。

a が偶数のとき $n_0=a+1-\dfrac{1}{2}\{1+1\}=a$

a が奇数のとき $n_0=a+1-\dfrac{1}{2}\{1-1\}=a+1$

①よりこれらは非負の整数値である。

（ⅱ）n_0 が $n+(-1)^n>A$ を満たすことを示す。

a が偶数のとき $n_0+(-1)^{n_0}=a+(-1)^a=a+1>A$

a が奇数のとき $n_0+(-1)^{n_0}=a+1+(-1)^{a+1}=a+2>A$

（ⅲ）n_0 が最小であることを示す。

$n \leqq n_0-1$ …② とする。

(A) a が偶数のとき $n_0=a$ であり，

$n+(-1)^n \leqq n+1 \leqq n_0=a \leqq A$ となって $n+(-1)^n>A$ を満たさない。

(B) a が奇数のとき $n_0=a+1$ であり，

n が奇数のときは $n+(-1)^n \leqq n-1 \leqq n_0-2=a-1 \leqq A$ となって $n+(-1)^n>A$ を満たさない。

n が偶数のときは ②の左辺は偶数，右辺は奇数であるから $n \leqq n_0-2$ となり，

$n+(-1)^n \leqq n+1 \leqq n_0-1=a \leqq A$ となって $n+(-1)^n>A$ を満たさない。

(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，$n_0=a+1-\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}$ は題意を満たす。

(2) $A=\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$， $B=\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ とおく。

$a>0$ で両式を割ると $A=\left\{\dfrac{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$， $B=\left\{\dfrac{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^3}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}$ となり，

$\dfrac{b}{a}=t$ とおくと $A=\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, B=\left(\dfrac{1+t^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ となる。

$t \geqq 1$ すなわち $a \leqq b$ として考えてもよい。

$a \geqq b$ のときは $\dfrac{a}{b}=t$ とすれば同じ式を得ることができる。

$$
\begin{aligned}
A^6-B^6&=\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^3-\left(\frac{1+t^3}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{8}\left\{t^6+3t^4+3t^2+1-2(t^6+2t^3+1)\right\}\\
&=\frac{1}{8}\left(-t^6+3t^4-4t^3+3t^2-1\right)\\
&=-\frac{1}{8}(t-1)\left(t^5+t^4-2t^3+2t^2-t-1\right)\\
&=-\frac{1}{8}(t-1)^2\left(t^4+2t^3+2t+1\right)\quad\cdots(*)
\end{aligned}
$$

$t \geqq 1$ より $(*)\leqq 0$ である。等号成立は $t=1$ すなわち $a=b$ のとき。

よって $A^6 \leqq B^6 \Leftrightarrow A \leqq B$ なので $\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ である。