

[東京工業大学 1957 年 解析 I 2]



実係数の 2 つの二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ の係数の間に $ac = 2(b + d)$ という関係があるならば, これらの方程式の少なくとも一方は実根をもつことを証明せよ。



$x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ の判別式をそれぞれ D_1 , D_2 とおくと

$D_1 = a^2 - 4b$, $D_2 = c^2 - 4d$ である。

このとき, $D_1 + D_2 = a^2 - 4b + c^2 - 4d$

$$= a^2 + c^2 - 4(b + d)$$

$ac = 2(b + d)$ より $= a^2 + c^2 - 2ac$

$$= (a - c)^2 \geq 0$$

よって D_1, D_2 の少なくとも一方は 0 以上である。

したがって, これらの方程式の少なくとも一方は実根をもつ。