[東京工業大学 1957 年 解析 I $\boxed{1}$]

$x=\dfrac{b-c}{1+bc}$, $y=\dfrac{c-a}{1+ca}$, $z=\dfrac{a-b}{1+ab}$ なるとき, $x+y+z-xyz$ をなるべく簡単にせよ。

$$x+y+z-xyz=\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=\frac{(b-c)(1+ca)+(c-a)(1+bc)}{(1+bc)(1+ca)}+\frac{a-b}{1+ab}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=\frac{b-c+abc-c^2a+c-a+bc^2-abc}{(1+bc)(1+ca)}+\frac{a-b}{1+ab}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=\frac{-(a-b)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ca)}+\frac{a-b}{1+ab}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=(a-b)\frac{-(1+c^2)(1+ab)+(1+bc)(1+ca)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=(a-b)\frac{-(1+ab+c^2+abc^2)+1+ca+bc+abc^2}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=(a-b)\frac{(b-c)(c-a)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}-\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

$$=0$$

［ 東京工業大学 1957 年 解析Ⅰ $\boxed{2}$ ］

☆―――☆

実係数の 2 つの二次方程式 $x^2+ax+b=0,\ x^2+cx+d=0$ の係数の間に $ac=2(b+d)$ という関係があるならば，これらの方程式の少なくとも一方は実根をもつことを証明せよ。

☆―――☆

$x^2+ax+b=0,\ x^2+cx+d=0$ の判別式をそれぞれ $D_1,\ D_2$ とおくと

$D_1=a^2-4b$，$D_2=c^2-4d$ である。

このとき，$D_1+D_2=a^2-4b+c^2-4d$

$=a^2+c^2-4(b+d)$

$ac=2(b+d)$ より $=a^2+c^2-2ac$

$=(a-c)^2\geqq 0$

よって $D_1,\ D_2$ の少なくとも一方は 0 以上である。

したがって，これらの方程式の少なくとも一方は実根をもつ。

[東京工業大学 1957 年 解析Ⅰ $\boxed{3}$]

---

(1) $n+(-1)^n > A$ であるような n の最小な非負の整数値は $a+1-\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}$ で与えられること

を示せ。ただし，A は与えられた正数，a は A を超えない最大の整数とする。

(2) $a,\ b$ を正数とするとき，$\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ と $\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ との大小を比較せよ。

---

(1) 題意より $a \leqq A < a+1$ …① である。

また，$n_0 = a+1-\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}$ とおく。

(ⅰ) n_0 が非負の整数値であることを示す。

a が偶数のとき $n_0 = a+1-\dfrac{1}{2}\{1+1\} = a$

a が奇数のとき $n_0 = a+1-\dfrac{1}{2}\{1-1\} = a+1$

①よりこれらは非負の整数値である。

(ⅱ) n_0 が $n+(-1)^n > A$ を満たすことを示す。

a が偶数のとき $n_0+(-1)^{n_0} = a+(-1)^a = a+1 > A$

a が奇数のとき $n_0+(-1)^{n_0} = a+1+(-1)^{a+1} = a+2 > A$

(ⅲ) n_0 が最小であることを示す。

$n \leqq n_0 - 1$ …② とする。

(A) a が偶数のとき $n_0 = a$ であり，

$n+(-1)^n \leqq n+1 \leqq n_0 = a \leqq A$ となって $n+(-1)^n > A$ を満たさない。

(B) a が奇数のとき $n_0 = a+1$ であり，

n が奇数のときは $n+(-1)^n \leqq n-1 \leqq n_0-2 = a-1 \leqq A$ となって $n+(-1)^n > A$ を満たさない。

n が偶数のときは ②の左辺は偶数，右辺は奇数であるから $n \leqq n_0 - 2$ となり，

$n+(-1)^n \leqq n+1 \leqq n_0-1 = a \leqq A$ となって $n+(-1)^n > A$ を満たさない。

(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より， $n_0=a+1-\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}$ は題意を満たす。

⑵ $A=\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$， $B=\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ とおく。

$a>0$ で両式を割ると $A=\left\{\dfrac{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ ， $B=\left\{\dfrac{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^3}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}$ となり，

$\dfrac{b}{a}=t$ とおくと $A=\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $B=\left(\dfrac{1+t^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ となる。

$t\geqq 1$ すなわち $a\leqq b$ として考えてもよい。

$a\geqq b$ のときは $\dfrac{a}{b}=t$ とすれば同じ式を得ることができる。

$$A^6-B^6=\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^3-\left(\frac{1+t^3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{8}\left\{t^6+3t^4+3t^2+1-2(t^6+2t^3+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left(-t^6+3t^4-4t^3+3t^2-1\right)$$

$$=-\frac{1}{8}(t-1)\left(t^5+t^4-2t^3+2t^2-t-1\right)$$

$$=-\frac{1}{8}(t-1)^2\left(t^4+2t^3+2t+1\right) \quad \cdots(*)$$

$t\geqq 1$ より（∗）$\leqq 0$ である。等号成立は $t=1$ すなわち $a=b$ のとき。

よって $A^6\leqq B^6 \Leftrightarrow A\leqq B$ なので $\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ である。

[東京工業大学 1957 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

☆ ☆

(1) x を正数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$(1+x)^n \geqq 1+nx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt[2n]{n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

☆ ☆

(1) $n=1$ のとき， $(1+x)^1 \geqq 1+1\cdot x$ となって等号が成立する。

$n \geqq 2$ のとき，二項定理より

$$(1+x)^n = 1+{}_n\mathrm{C}_1 x+\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k$$

となるが， $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k>0$ であるから $(1+x)^n > 1+{}_n\mathrm{C}_1 x = 1+nx$ となって成立する。

以上より，題意は示された。

(2) (1)の結果において $x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とすると

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqq 1+n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} > \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$$

を得る。

したがって $1+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > n^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{n}$ となる。

(3) $n \geqq 1$ なので $\sqrt[n]{n} \geqq 1$ であり，(2)から $1 \leqq \sqrt[n]{n} < \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ である。

ここで， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=1$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

[東京工業大学 1957 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

$g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $f(x)=g(x+1)-g(x)$ なるとき，次の無限級数の和を求めよ。

$f(x)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots\cdots$

$S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x-k)$ とおく。

$f(x-k)=g(x-k+1)-g(x-k)$ であるから

$$
\begin{aligned}
S_n(x)&=\sum_{k=0}^{n} f(x-k)\\
&=\sum_{k=0}^{n} g(x-k+1)-\sum_{k=0}^{n} g(x-k)\\
&=\left\{g(x+1)+g(x)+\cdots+g(1)\right\}-\left\{g(x)+g(x-1)+\cdots+g(x-n)\right\}\\
&=g(x+1)-g(x-n)\\
&=\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1+|x-n|}
\end{aligned}
$$

となる。

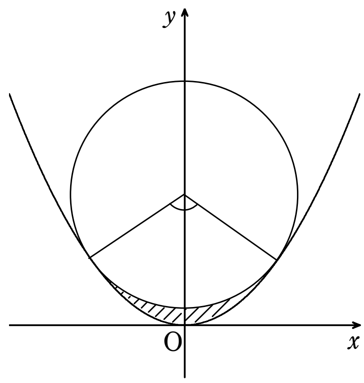
$n\to\infty$ のときを考えるので $|x-n|=-(x-n)$ としてよく，

このとき，$f(x)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots\cdots=\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n(x)$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1+|x-n|}\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x+1}{1+|x+1|}-\frac{x-n}{1-x+n}\right\}\\
&=\frac{x+1}{1+|x+1|}+1
\end{aligned}
$$

[東京工業大学 1957年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

中心が y 軸上にありしかも x 軸と交わらない半径 1 の円が放物線 $y=x^2$ と 2 点を共有している。この円の下方の弧とこの放物線とが囲む図形を F とする。



(1) F を見込むこの円の中心角はいくらか。

(2) F の面積はいくらか。

(1) 題意の円の中心を $(0, a)$ とすると，円の方程式は $x^2+(y-a)^2=1$ とおける。

これと $y=x^2$ を連立して $y+(y-a)^2=1 \Leftrightarrow y^2+(-2a+1)y+a^2-1=0$ …①

①の判別式を D とすると，円と放物線が接することから

$$D=(-2a+1)^2-4(a^2-1)=-4a+5=0$$

よって $a=\dfrac{5}{4}$ となる。このとき，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\dfrac{3}{4}$ である。

題意の中心角を θ（$0<\theta<\pi$）とおくと

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

より $\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

(2) 求める面積を S とする。対称性を考えると，第 1 象限にある部分の面積を 2 倍すればよい。

台形から「扇形」と「放物線と x 軸とで囲む部分」を引くと考えて

$$\frac{1}{2}S=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}$$

よって $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

[東京工業大学 1957 年 幾何 $\boxed{1}$]

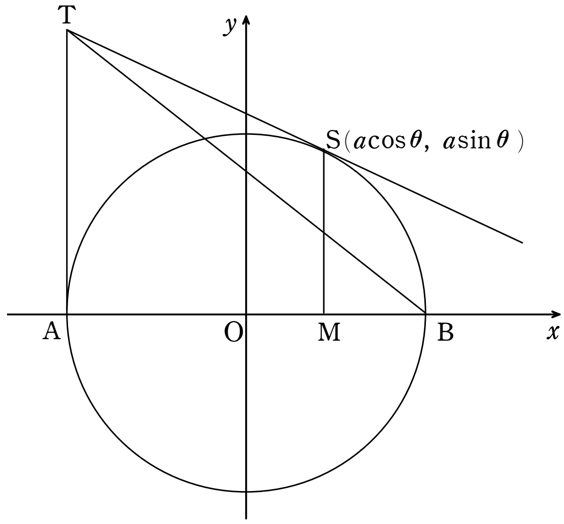
与えられた円の１点Aから直径ABおよび接線ATを引く。接線AT上の１点Tから第２の接線TSを引き，その接点SからABに垂線SMを引く。このとき，線分SMはTBによって２等分されることを証明せよ。

ABの中点を原点， B $(a, 0)$ とする。

$\angle\mathrm{SOB}=\theta$ とすると， $\mathrm{S}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ であり，

Sにおける接線は $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=a$ …① となる。

さらに $\mathrm{A}(-a,\ 0)$ であり，①より $\mathrm{T}\left(-a,\ \dfrac{a+a\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ となる。



したがって，直線TBの方程式は

$$y=\frac{-\dfrac{a+a\cos\theta}{\sin\theta}}{a-(-a)}(x-a)=-\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}(x-a)\quad\cdots②$$

となる。

線分SMと②との交点の y 座標は

$$-\frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}(a\cos\theta-a)=\frac{1}{2}a\sin\theta$$

となる。

よって，線分SMはTBによって２等分される。

[東京工業大学 1957 年 幾何 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――☆

正三角形ABCの外接円の任意の 1 点をPとするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ は $6R^2$ に等しいことを証明せよ。ただし R は外接円の半径を表す。

☆―――――――――――――――――――――――――――☆

座標を設定して考える。

$$\mathrm{A}(R,\ 0),\quad \mathrm{B}\left(R\cos\frac{2}{3}\pi,\ R\sin\frac{2}{3}\pi\right),\quad \mathrm{C}\left(R\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right),\ R\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right),\quad \mathrm{P}(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2 &= \left(R-R\cos\theta\right)^2+\left(R\sin\theta\right)^2+\left(R\cos\theta-R\cos\frac{2}{3}\pi\right)^2+\left(R\sin\theta-R\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2\\ &\qquad +\left(R\cos\theta-R\cos\frac{2}{3}\pi\right)^2+\left(R\sin\theta+R\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2\\ &= R^2\left\{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\left(\cos^2\theta+\cos\theta+\frac{1}{4}\right)+2\left(\sin^2\theta+\frac{3}{4}\right)\right\}\\ &= 6R^2\end{aligned}$$

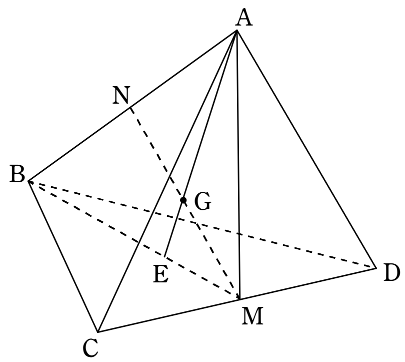
よって示された。

[東京工業大学 1957 年 幾何 $\boxed{3}$]

☆ ☆

四面体の稜とこれに対する稜の中点とで定まる平面は，ことごとく，1 点を共有することを示せ。

☆ ☆



図のように四面体 ABCD をとり

CD，AB の中点を M，N とおく。

さらに，底面の△BCD の重心を E とする。

AE を 3:1 に内分する点を G とすると，

この G が共有する 1 点であることを示す。

(ⅰ)「A を通る稜とその対する稜の中点を通る平面は AE を含むこと」

稜 AB と M を通る平面が AE を含むことを示す。

平面 ABM は A を含み，E は△BCD の重心であるから BM は E を通る。

したがって，平面 ABM は AE を含む。

(ⅱ)「A を通らない稜とその対する稜の中点で定まる平面は AE と G で交わること」

稜 CD と N を通る平面が AE と G で交わることを示す。

NM が AE と G で交わることを示せばよいが，

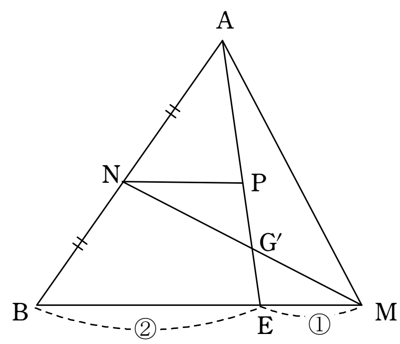
AE と MN の交点を G′，AE の中点を P とすると

$\mathrm{NP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BE}=\mathrm{EM}$ より

$\triangle \mathrm{G'NP} \equiv \triangle \mathrm{G'ME}$

よって $\mathrm{PG'}=\mathrm{EG'}$ から $\mathrm{AG'}:\mathrm{G'E}=3:1$

すなわち G と G′ は一致する。



(ⅰ)，(ⅱ)より，任意の稜とそれに対する稜の中点が定める平面は G を通る。