[東京工業大学 1956 年 幾何 $\boxed{3}$]

(1) 円に外接する等角多角形は正多角形か。

(2) 円に内接する等角多角形は正多角形か。

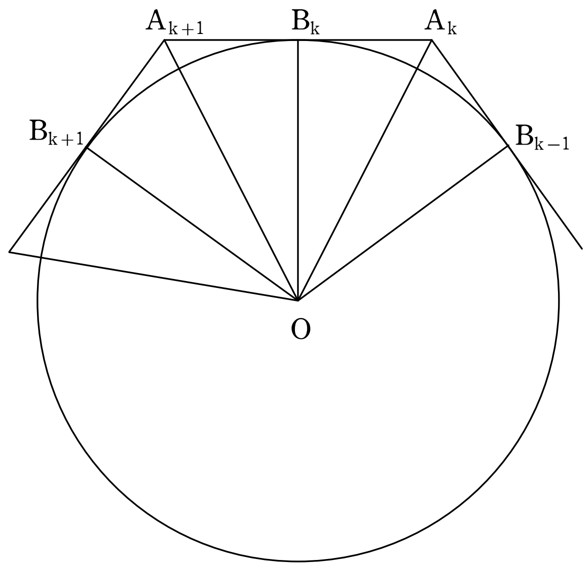
(1) 多角形を n 角形とし，その頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とおく。

また，辺 A_kA_{k+1} と円の接点を B_k とする。ただし，$A_{n+1}=A_1$ とする。

円の中心を O とする。

任意の k に対し，$\triangle A_kB_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_{k+1}O$ が示されれば，

正多角形ということになる。



(ⅰ) $\triangle A_{k+1}B_kO$ と $\triangle A_{k+1}B_{k+1}O$ において

$B_kO = B_{k+1}O$ …①

$\angle B_k = \angle B_{k+1} = 90^\circ$ …②

$A_{k+1}O$ は共通 …③

①，②，③より $\triangle A_{k+1}B_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_{k+1}O$

(ⅱ) $\triangle A_kB_kO$ と $\triangle A_{k+1}B_kO$ において

$\angle A_kB_kO = \angle A_{k+1}B_kO = 90^\circ$ …④

(ⅰ) より $\angle OA_kB_k = \dfrac{1}{2}\angle A_k$，$\angle OA_{k+1}B_k = \dfrac{1}{2}\angle A_{k+1}$ であり，$\angle A_k = \angle A_{k+1}$ なので

$\angle OA_kB_k = \angle OA_{k+1}B_k$ …⑤

B_kO は共通 …⑥

④，⑤，⑥より $\triangle A_kB_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_kO$

(ⅰ)，(ⅱ)よりこの命題は正しい。

(2) 反例として長方形が挙げられるので，この命題は正しくない。