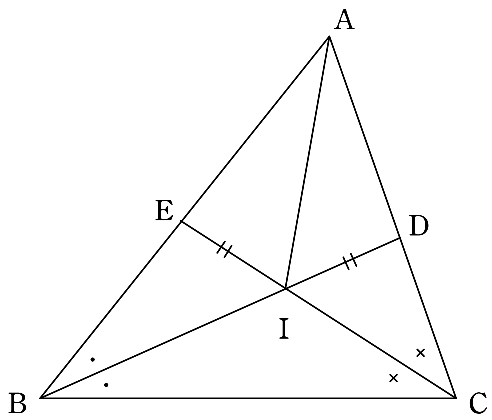
[**東京工業大学 1956 年 幾何 $\boxed{2}$**]

三角形ABCにおいて$\angle$B，$\angle$Cの二等分線が対辺と交わる点をそれぞれD, Eとし，これらの二等分線の交点をIとする。もしIDとIEとが相等しいならば，三角形ABCはどんな形であるか。

Iは$\triangle$ABCの内心なので AI は$\angle$Aの二等分線である。

$\triangle$AIDと$\triangle$AIEにおいて



・$\angle \mathrm{DAI} = \angle \mathrm{EAI}$

・$\mathrm{IE} = \mathrm{ID}$

・AIは共通

であるから

① $\triangle \mathrm{AID} \equiv \triangle \mathrm{AIE}$

② $\angle \mathrm{AEI} = \angle \mathrm{ADI} = 90^\circ$

のいずれかである。

(ⅰ) ①のとき

$\triangle$ABDと$\triangle$ACEにおいて

・$\mathrm{AD} = \mathrm{AE}$

・$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{AEC}$

・$\angle$A は共通

であるから $\triangle \mathrm{ABD} \equiv \mathrm{ACE}$ である。よって $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$

このとき，$\triangle$ABCは二等辺三角形になる。

(ⅱ) ②のとき

$\angle \mathrm{AEI} = \angle \mathrm{B} + \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{C} = 90^\circ$， $\angle \mathrm{ADI} = \angle \mathrm{C} + \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{B} = 90^\circ$ より

$\dfrac{3}{2}\angle \mathrm{B} + \dfrac{3}{2}\angle \mathrm{C} = 180^\circ$ から $\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = 120^\circ$

よって，このとき$\triangle$ABCは$\angle \mathrm{A} = 60^\circ$の三角形になる。

以上より，$\triangle$ABCは「$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$の二等辺三角形」または「$\angle \mathrm{A} = 60^\circ$の三角形」