[東京工業大学 1956 年 幾何 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 つの三角形ABC, A′B′C′ において $\angle \mathrm{A}$ と $\angle \mathrm{A}'$ とは補角をなし，$\angle \mathrm{B}$ と $\angle \mathrm{B}'$ とは相等しいとする。

このとき，次の関係式を証明せよ。

$aa' = bb' + cc'$　ここに，$a, \cdots, c'$ はそれぞれ辺 BC, …, A′B′ の長さを表す。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\angle \mathrm{A} = \alpha,\ \angle \mathrm{B} = \beta$ とおくと $\angle \mathrm{C} = \pi - (\alpha + \beta)$ であり，

$0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi,\ 0 < \alpha + \beta < \pi$ を満たす。

このとき，$\angle \mathrm{A}' = \pi - \alpha,\ \angle \mathrm{B}' = \beta$ より $\angle \mathrm{C}' = \alpha - \beta$ となる。

△ABC，△A′B′C′ において正弦定理より

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}},\quad \frac{a'}{\sin \mathrm{A}'} = \frac{b'}{\sin \mathrm{B}'} = \frac{c'}{\sin \mathrm{C}'}$$

したがって
$$b = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}} a = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a$$

$$c = \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A}} a = \frac{\sin\{\pi - (\alpha + \beta)\}}{\sin \alpha} a = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} a$$

$$b' = \frac{\sin \mathrm{B}'}{\sin \mathrm{A}'} a' = \frac{\sin \beta}{\sin(\pi - \alpha)} a' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a'$$

$$c' = \frac{\sin \mathrm{C}'}{\sin \mathrm{A}'} a' = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\pi - \alpha)} a' = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} a'$$

となるので，

$$bb' + cc' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a' + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} a \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} a'$$

$$= \left\{ \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha} \right\} aa' = \left\{ \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\sin^2 \alpha} \right\} aa'$$

$$= \left\{ \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)}{\sin^2 \alpha} \right\} aa'$$

$$= \left\{ \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \right\} aa'$$

$$= aa'$$