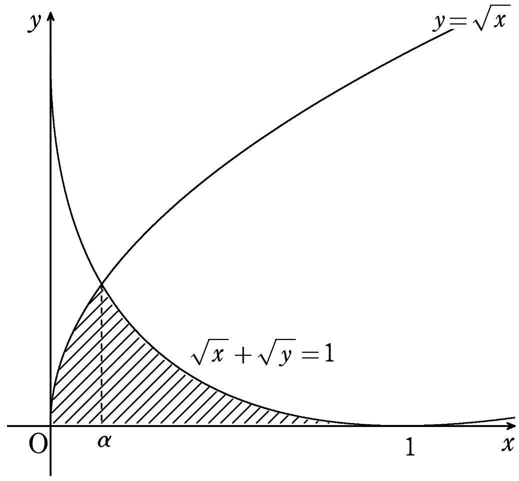
[東京工業大学 1956 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

2 つの曲線 $y=\sqrt{x},\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$y=\sqrt{x}$ …①, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ …②

①と②の交点の x 座標を求めると $y+\sqrt{y}-1=0$ かつ $\sqrt{y}\geqq 0$ より $\sqrt{y}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって $y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ から ①より $x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ とおく。この x を α とおく。



求める面積 $S=\int_0^{\alpha}\sqrt{x}\,dx+\int_{\alpha}^{1}\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha}+\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}-\left(\alpha-\frac{4}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$=-\alpha+2\alpha^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{6}$$

$$=-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+2\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{1}{6}$$

$$=-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+18-8\sqrt{5}-\frac{47-21\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{-61+27\sqrt{5}}{4}+18-8\sqrt{5}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{-183+81\sqrt{5}+216-96\sqrt{5}+2}{12}$$

$$=\frac{35-15\sqrt{5}}{12}$$