[東京工業大学 1956 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

$f(x)$ を x について微分できる関数とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は相異なる n 個のものから k 個をとり出す組合せの数を表す。

とくに $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ のとき，問題の極限値はどうなるか。

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{x}{n}\right)^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k \cdot\frac{x^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$=\frac{x^k}{k!}\{f'(0)\}^k$$

となる。

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ のとき $f'(0)=-(\alpha+\beta)$ であるから

このときの極限値は $\dfrac{x^k}{k!}\{-(\alpha+\beta)\}^k$