[東京工業大学 1956 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

☆ ☆

r を正の整数とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^r}{n^a}$ が 0 でない有限な値として存在するためには，a はどんな値でなければならぬか。また，このときの極限値を求めよ。

☆ ☆

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k^r}{n^a}=\frac{n^r\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r}{n^a}=n^{r-a+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r$$ であり，

$n\to\infty$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r=\int_0^1 x^r dx=\frac{1}{r+1}$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^r}{n^a}$ がが 0 でない有限な値として存在するためには $r-a+1=0$ でなければならない。

すなわち $a=r+1$ で，このときの極限値は $\dfrac{1}{r+1}$