[東京工業大学 1956 年 解析 I $\boxed{1}$]

$a,\ b,\ c$ を 1 より小さい正数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$a+b+c-abc<2$$

$P=2-(a+b+c-abc)$ とおく。

$P=2-(1-bc)a-b-c$ であり，$0<b<1$，$0<c<1$ から $1-bc>0$

$a<1$ より $P>2-(1-bc)-b-c$

$$=bc-b-c+1$$

$$=(b-1)(c-1)$$

$$>0$$

よって示された。

[東京工業大学 1956 年 解析Ⅰ $\boxed{2}$]

2 つの n 次の整式 $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ が $n+1$ 個の相異なる x の値に対して相等しいならば，これらの整式は恒等的に相等しいことを証明せよ。

$\mathrm{R}(x)=\mathrm{P}(x)-\mathrm{Q}(x)$ とおくと，$\mathrm{R}(x)$ は高々 n 次の整式である。

ここで，$n+1$ 個の相異なる x の値 $x=a_i$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ に対して $\mathrm{R}(a_i)=0$ とすると，

因数定理より $\mathrm{R}(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n+1})\mathrm{S}(x)$ …① と因数分解される。

いま，$\mathrm{S}(x)\neq 0$ であるとすると①の左辺は高々 n 次，右辺は $n+1$ 次となり，矛盾。

よって $\mathrm{S}(x)=0$ である。よって $\mathrm{R}(x)=0$ となるから $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ となる。

[東京工業大学 1956 年 解析 I $\boxed{3}$]

☆

x の二次関数 y がある。x が $-1,\ 0,\ 1$ のとき，y の値はそれぞれ $-1,\ -2,\ 1$ に等しい。この関数のグラフが x 軸から切りとる線分の長さを求めよ。

☆

$y = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$ とおく。

題意の条件より $\begin{cases} -1 = a - b + c \\ -2 = c \\ 1 = a + b + c \end{cases}$ よって $a = 2,\ b = 1,\ c = -2$

してがって $y = 2x^2 + x - 2$ となるが，この二次関数は題意を満たしている。

$y = 0$ として $2x^2 + x - 2 = 0$ から $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

よって，求める線分の長さは $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} - \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

[東京工業大学 1956 年 解析Ⅱ $\boxed{1}$]

r を正の整数とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^r}{n^a}$ が 0 でない有限な値として存在するためには，a はどんな値でなければならぬか。また，このときの極限値を求めよ。

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k^r}{n^a}=\frac{n^r\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r}{n^a}=n^{r-a+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r$$ であり，

$n\to\infty$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r=\int_0^1 x^r dx=\frac{1}{r+1}$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^r}{n^a}$ がが 0 でない有限な値として存在するためには $r-a+1=0$ でなければならない。

すなわち $a=r+1$ で，このときの極限値は $\dfrac{1}{r+1}$

[東京工業大学 1956 年 解析Ⅱ $\boxed{2}$]

$f(x)$ を x について微分できる関数とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は相異なる n 個のものから k 個をとり出す組合せの数を表す。

とくに $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ のとき，問題の極限値はどうなるか。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right\}^k &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{x}{n}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\right\}^k \cdot\frac{x^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\cdots\frac{n-k+1}{n}\right) \\
&= \frac{x^k}{k!}\left\{f'(0)\right\}^k
\end{aligned}$$

となる。

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ のとき $f'(0)=-(\alpha+\beta)$ であるから

このときの極限値は $\dfrac{x^k}{k!}\left\{-(\alpha+\beta)\right\}^k$

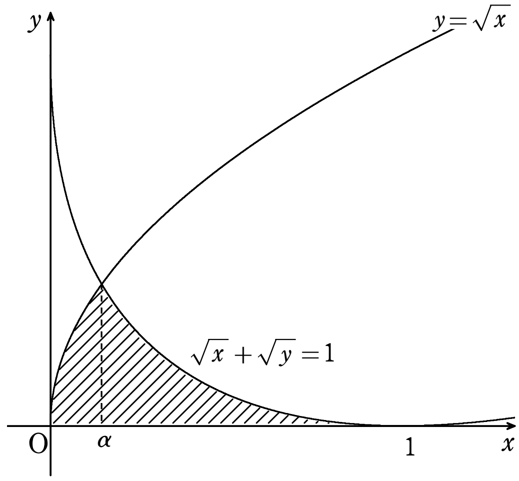
[東京工業大学 1956 年 解析Ⅱ $\boxed{3}$]

2 つの曲線 $y=\sqrt{x},\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$y=\sqrt{x}$ …①, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ …②

①と②の交点の x 座標を求めると $y+\sqrt{y}-1=0$ かつ $\sqrt{y}\geqq 0$ より $\sqrt{y}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって $y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ から ①より $x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ とおく。この x を α とおく。



求める面積 $S=\int_0^{\alpha}\sqrt{x}\,dx+\int_{\alpha}^{1}\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha}+\left[x-\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{1}$

$=\dfrac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{6}-\left(\alpha-\dfrac{4}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)$

$=-\alpha+2\alpha^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}\alpha^2+\dfrac{1}{6}$

$=-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}+2\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$

$=-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}+18-8\sqrt{5}-\dfrac{47-21\sqrt{5}}{4}+\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{-61+27\sqrt{5}}{4}+18-8\sqrt{5}+\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{-183+81\sqrt{5}+216-96\sqrt{5}+2}{12}$

$=\dfrac{35-15\sqrt{5}}{12}$

[東京工業大学 1956 年 幾何 $\boxed{1}$]

2 つの三角形 ABC, A′B′C′ において ∠A と ∠A′ とは補角をなし，∠B と ∠B′ とは相等しいとする。このとき，次の関係式を証明せよ。

$aa' = bb' + cc'$　ここに，$a, \cdots, c'$ はそれぞれ辺 BC, ⋯, A′B′ の長さを表す。

$\angle\mathrm{A} = \alpha,\ \angle\mathrm{B} = \beta$ とおくと $\angle\mathrm{C} = \pi - (\alpha+\beta)$ であり，

$0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi,\ 0 < \alpha+\beta < \pi$ を満たす。

このとき，$\angle\mathrm{A}' = \pi - \alpha,\ \angle\mathrm{B}' = \beta$ より $\angle\mathrm{C}' = \alpha - \beta$ となる。

△ABC，△A′B′C′ において正弦定理より

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}} = \frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}},\quad \frac{a'}{\sin\mathrm{A}'} = \frac{b'}{\sin\mathrm{B}'} = \frac{c'}{\sin\mathrm{C}'}$$

したがって $b = \dfrac{\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{A}}a = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}a$

$$c = \frac{\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{A}}a = \frac{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}{\sin\alpha}a = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}a$$

$$b' = \frac{\sin\mathrm{B}'}{\sin\mathrm{A}'}a' = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha)}a' = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a'$$

$$c' = \frac{\sin\mathrm{C}'}{\sin\mathrm{A}'}a' = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\pi-\alpha)}a' = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}a'$$

となるので，

$$bb' + cc' = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a' + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}a \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}a'$$

$$= \left\{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha}\right\}aa' = \left\{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos2\alpha - \cos2\beta}{\sin^2\alpha}\right\}aa'$$

$$= \left\{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2\sin^2\alpha)-(1-2\sin^2\beta)}{\sin^2\alpha}\right\}aa'$$

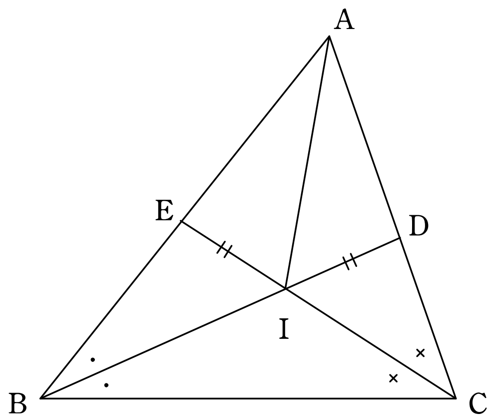
$$= \left\{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right\}aa'$$

$$= aa'$$

[東京工業大学 1956 年 幾何 $\boxed{2}$]

三角形ABCにおいて$\angle B$，$\angle C$の二等分線が対辺と交わる点をそれぞれD, Eとし，これらの二等分線の交点をIとする。もしIDとIEとが相等しいならば，三角形ABCはどんな形であるか。

Iは$\triangle ABC$の内心なので AI は$\angle A$の二等分線である。



$\triangle AID$と$\triangle AIE$において

・$\angle DAI=\angle EAI$

・$IE=ID$

・AIは共通

であるから

① $\triangle AID \equiv \triangle AIE$

② $\angle AEI=\angle ADI=90^\circ$

のいずれかである。

(ⅰ) ①のとき

$\triangle ABD$と$\triangle ACE$において

・$AD=AE$

・$\angle ADB=\angle AEC$

・$\angle A$は共通

であるから $\triangle ABD \equiv ACE$ である。よって $AB=AC$

このとき，$\triangle ABC$は二等辺三角形になる。

(ⅱ) ②のとき

$\angle AEI=\angle B+\dfrac{1}{2}\angle C=90^\circ$，$\angle ADI=\angle C+\dfrac{1}{2}\angle B=90^\circ$ より

$\dfrac{3}{2}\angle B+\dfrac{3}{2}\angle C=180^\circ$ から $\angle B+\angle C=120^\circ$

よって，このとき$\triangle ABC$は$\angle A=60^\circ$の三角形になる。

以上より，$\triangle ABC$は「$AB=AC$の二等辺三角形」または「$\angle A=60^\circ$の三角形」

［ 東京工業大学 1956 年 幾何 $\boxed{3}$ ］

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 円に外接する等角多角形は正多角形か。

(2) 円に内接する等角多角形は正多角形か。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

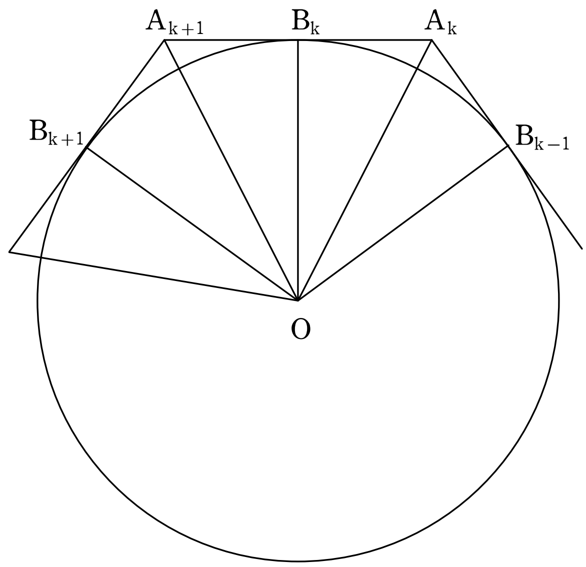
(1) 多角形を n 角形とし，その頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とおく。

また，辺 A_kA_{k+1} と円の接点を B_k とする。ただし，$A_{n+1} = A_1$ とする。

円の中心を O とする。

任意の k に対し，$\triangle A_kB_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_{k+1}O$ が示されれば，

正多角形ということになる。



(ⅰ) $\triangle A_{k+1}B_kO$ と $\triangle A_{k+1}B_{k+1}O$ において

$B_kO = B_{k+1}O$ …①

$\angle B_k = \angle B_{k+1} = 90^\circ$ …②

$A_{k+1}O$ は共通 …③

①，②，③より $\triangle A_{k+1}B_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_{k+1}O$

(ⅱ) $\triangle A_kB_kO$ と $\triangle A_{k+1}B_kO$ において

$\angle A_kB_kO = \angle A_{k+1}B_kO = 90^\circ$ …④

(ⅰ) より $\angle OA_kB_k = \dfrac{1}{2}\angle A_k$，$\angle OA_{k+1}B_k = \dfrac{1}{2}\angle A_{k+1}$ であり，$\angle A_k = \angle A_{k+1}$ なので

$\angle OA_kB_k = \angle OA_{k+1}B_k$ …⑤

B_kO は共通 …⑥

④，⑤，⑥より $\triangle A_kB_kO \equiv \triangle A_{k+1}B_kO$

(ⅰ)，(ⅱ)よりこの命題は正しい。

(2) 反例として長方形が挙げられるので，この命題は正しくない。