【練習問題】

（1） $y=x^2-2x$

$y=(x-1)^2-1$ より $(1,-1)$

（2） $y=-x^2-x-1$

$y=-(x^2+x)-1=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-1=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ より $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$

（3） $y=3x^2+12x-2$

$y=3(x^2+4x)-2=3(x+2)^2-12-2=3(x+2)^2-14$ より $(-2,-14)$

（4） $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$y=-\frac{1}{2}(x^2-2x)-1=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}$ より $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{1－1}$

$x=2$ のとき、最大値８をとることから、求める関数は $y=a(x-2)^2+8$ とおける。

点 $(4,-4)$ を通ることから、$-4=a(4-2)^2+8$ $\quad\therefore a=-3$

元の式に代入して $y=-3(x-2)^2+8=-3x^2+12x-4$

$y=ax^2+bx+c$ と係数を比較して、$a=-3, b=12, c=-4$

■Remark■

２次関数のおき方は、大きく分けて一般形の $y=ax^2+bx+c$ と頂点のわかる形の $y=a(x-p)^2+q$ とがある。どちらでおいた方が式変形上有利か、それをしっかり考えて欲しい問題である。

例えば、この問題を一般形のまま解こうとすると、

$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ と平方完成でき、条件から $\begin{cases} -\frac{b}{2a}=2 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=8 \\ -4=\left(4+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$

という式を解くことになる。

こんなのを解くのは嫌だし、計算間違いの危険も大きいでしょう。…でも、最悪の場合、腕力（計算力）も大事なんですけどね。解くことはできるはずなのですから。

（自習問題１）

求める関数は $f(x)=a(x+1)^2+4$ とおける。条件より $f(1)=0$ であるから、

$0=a(1+1)^2+4 \qquad \therefore a=-1$

よって $f(x)=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$

$f(x)=ax^2+bx+c$ と係数を比較して　$a=-1, b=-2, c=3$

$\boxed{1-2}$

$y=a(x^2-8x)+b=a(x-4)^2-16a+b$ より、頂点の x 座標は４であるので、

$a>0$ より下に凸なので、$2 \leqq x \leqq 5$ におけるこの関数の最大値は $x=2$ のところでとられ、最小値は $x=4$ のところでとられる。

よって、$\begin{cases} 6=4a-16a+b \\ -2=16a-32a+b \end{cases}$　より　$a=2, b=30$

■Remark■

定義域の制限された関数の最大・最小である。定義域が閉区間なので、連続な関数ならばその区間において必ず最大値・最小値が存在する。本問の場合、$a>0$ より下に凸なので、２と５を比較して、軸の位置から遠い $x=2$

の方で最大値、軸の位置で最小値をとることを理解できれば極めて容易な問題であろう。２次関数の最大・最小はグラフを描くことが基本です。

（自習問題２）

$0<a<3$ とする。関数 $y=x^2-ax+b\ (0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が７、最小値が３であるとき、a, b の値を求めよ。

$y=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+b$ であり、$0<a<3$ より $0<\frac{a}{2}<\frac{3}{2}$ である。そして、下に凸なので

$x=3$ で最大値をとり、$x=\frac{a}{2}$ で最小値をとる。

したがって、$\begin{cases} 7=9-3a+b \\ 3=-\dfrac{a^2}{4}+b \end{cases}$　より　$\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}, \ \begin{cases} a=10 \\ b=28 \end{cases}$

$\boxed{1-3}$

$x^2+2y^2=1$ より、$y^2=\dfrac{1-x^2}{2}$ であり、$y^2 \geqq 0$ であるから、$\dfrac{1-x^2}{2}\geqq 0$　　$\therefore -1\leqq x\leqq 1\cdots$①

このとき　$x+3y^2=x+3(\dfrac{1-x^2}{2})=-\dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(x^2-\dfrac{2}{3}x)+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{5}{3}$

よって①のもとで、$x=\dfrac{1}{3}$ のとき、つまり $y=\pm\dfrac{2}{3}$ のとき、最大値 $\dfrac{5}{3}$

$x=-1$ のとき、つまり $y=0$ のとき、最小値 -1

■Remark■

問題文をしっかり読もう。数学の問題文に無駄な条件は無い。x, y が実数であるということ、これが $y^2\geqq 0$ を保証し、x の定義域を確定させるのである。←虚数だったらこんなこと言えないでしょ。

なお、この問題の条件 $x^2+2y^2=1$ は楕円上の点を表している。この楕円上の点は $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$ と媒介変数表示することもでき、数Ⅲの微分の知識が必要ではあるが、これを用いて $x+3y^2$ の最大・最小を考えることもできる。

また、$x+3y^2=k$ とおいて、これを $x^2+2y^2=1$ に代入し、実数解の存在条件 $(D\geqq 0)$ によって k の最大・最小を求めることもできる（$\boxed{1-4}$の方法）。

（自習問題３）

$x\geqq 0, y\geqq 0, x+y=4$ のとき、$(x-1)y$ の最大値・最小値を求めよ。

$x+y=4$ より、$y=4-x$ であり、$y\geqq 0$ より、$4-x\geqq 0$　　$\therefore x\leqq 4$　　$\therefore 0\leqq x\leqq 4\cdots$①

また、$(x-1)y=(x-1)(4-x)=-x^2+5x-4=-(x-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{9}{4}$ なので、①のもとで、

$x=\dfrac{5}{2}$ のとき、つまり $y=\dfrac{3}{2}$ のとき、最大値 $\dfrac{9}{4}$

$x=0$ のとき、つまり $y=4$ のとき、最小値 -4

■Remark■

定義域に制限があることに注意。$x\geqq 0, y\geqq 0, x+y=4$ というのは直線 $y=-x+4$ の第１象限だけを考えるということです。だから $0\leqq x\leqq 4$ なのです。この問題も $(x-1)y=k$ とおいて、実数解の存在条件に帰着させる方法も有効です。

$\boxed{1-4}$

$3x+4y=k$ とおくと、$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4}$ であり、$x^2+y^2=1$ に代入すると

$x^2+(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4})^2=1$　　　$\therefore 25x^2-6kx+k^2-16=0\cdots$（＊）

（＊）において、実数解が存在しなければならないから、$D≧0$ より

$\dfrac{D}{4}=(-3k)^2-25\cdot(k^2-16)≧0$　　　$\therefore 16k^2≦25\cdot16$　　　$\therefore k^2≦25$

したがって、$-5≦x≦5$　よって最大値５、最小値－５

■Remark■

$3x+4y=k$ とおくことで、$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4}$ となるので、これは「傾き $-\dfrac{3}{4}$、y 切片 $\dfrac{k}{4}$」の直線を表します。

よって、この直線と円 $x^2+y^2=1$ が共有点を持つ（つまり実数解 x,y が存在する）ような場合における k の最大・最小を求めればよいわけです。したがって判別式が鍵となります。

また、最大・最小になるのは、直線と円が接するときであることが、図形的にわかりますので、

点 $(0,0)$ と直線 $3x+4y-k=0$ の距離が１になるので、$\dfrac{|0+0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$　より　$k=\pm5$ とする方法もスマートでしょう。

なお、本来は最大・最小となるときの x,y の値 $(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$，$(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5})$ も明記するべきです。

（自習問題４）

$x+2y=k$ とおくと、$x=k-2y$ であり、これを $x^2+y^2+xy+x-y-1=0$ に代入して、

$(k-2y)^2+y^2+(k-2y)y+(k-2y)-y-1=0$　$\therefore 3y^2-3(1+k)y+k^2+k-1=0\cdots$（＊）

（＊）の判別式を D とすると、実数解の存在条件から $D=\{-3(1+k)\}^2-4\cdot3\cdot(k^2+k-1)≧0$

$$\therefore k^2-2k-7≦0\quad\therefore 1-2\sqrt{2}≦k≦1+2\sqrt{2}$$

$$\text{よって、}1-2\sqrt{2}≦x+2y≦1+2\sqrt{2}$$

$\boxed{1－5}$

$x^2+2xy+2y^2+2y=x^2+2yx+2y^2+2y$　　　　x について整理（降べきの順）

$=(x+y)^2+y^2+2y$　　　　x について平方完成

$=(x+y)^2+(y+1)^2-1$　　　　y について平方完成

よって、x, y が実数なので、$\begin{cases} x=-y \\ y=-1 \end{cases}$ のとき、つまり $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ のとき最小値 -1 をとる。

■Remark■

２変数の２次関数の最大・最小です。まず１つの変数について整理し、平方完成。また、残った部分でもう１つの変数について平方完成します。これにより、平方の部分と定数の部分に分析することができます。そして、これが一番重要なのですが、「x, y が実数」なので、平方の部分が０になるときに最小になります。もし、「x, y が実数」という条件がないと、そんなことは言えなくなります。

「偏微分」という概念を導入すれば、微分を利用して解くこともできますが、これは大学へ行ってから学んでください。

（自習問題５）

x, y が実数のとき、$x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10$ の最小値を求めよ。

$x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10=x^2-4yx-6x+5y^2+6y+10$

$=x^2-2(2y+3)x+5y^2+6y+10$

$=\{x-(2y+3)\}^2-(2y+3)^2+5y^2+6y+10$

$=\{x-(2y+3)\}^2+y^2-6y+1$

$=\{x-(2y+3)\}^2+(y-3)^2-8$

よって、x, y が実数なので、$\begin{cases} x=2y+3 \\ y=3 \end{cases}$ のとき、つまり $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}$ のとき最小値 -8 をとる。

$\boxed{1-6}$

$f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$

$X=x^2+2x+2$ とおくと、$X=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ より、$X \geqq 1 \cdots$①

このとき、$f(X)=aX^2+2aX+b=a(X+1)^2-a+b$ であり、

最小値を持つことから、$a>0$ であって、$X=1$ のときに最小値６をとるから、$a+2a+b=6$

$$\therefore 3a+b=6 \cdots ①$$

$$f(0)=11 \text{ より、} 4a+4a+b=11$$

$$\therefore 8a+b=11 \cdots ②$$

$$①,\ ② \text{より、} \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

■Remark■

x についての４次関数であるが、置き換えにより X の２次関数になる。置き換えたときに X の変域を確認しないと間違えます。変数を置換したときに、その変数の変域を確認することはこの問題に限らず、必ずしなければならないことです。三角関数のときもそうでしたよね！

（自習問題６）

$a \geqq 2$ のとき $f(x)=(x^2+2x)^2+a(x^2+2x)$ の最小値を求めよ。

$X=x^2+2x$ とおくと、$X=(x+1)^2-1$ より、$X \geqq -1 \cdots$①

このとき、$f(X)=X^2+aX=(X+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$ であり、

$a \geqq 2$ より、頂点の X 座標は $-\frac{a}{2} \leqq -1$ である。

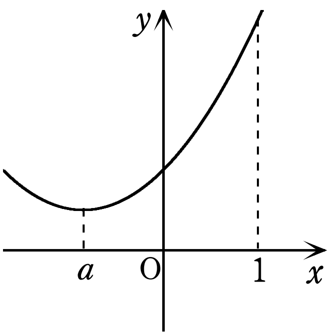
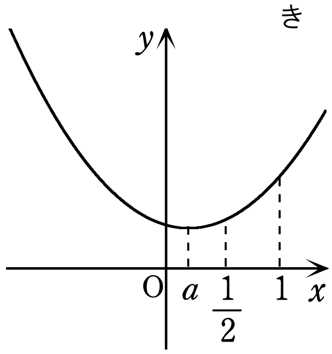
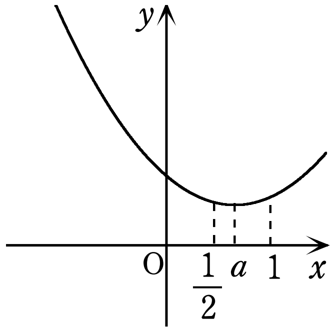
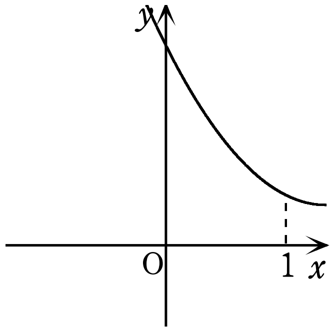
①より $X=-1$ のとき、つまり $x=-1$ のとき最小になり、最小値は $1-a$

$\boxed{1-7}$

$f(x)=x^2-2ax+a^2+1=(x-a)^2+1$ より、頂点の座標は $(a,1)$

よって、頂点（軸）の x 座標について場合分けをすると、

定義域は $0\leqq x\leqq 1$ において、

（ｉ）$a\leqq 0$ のとき	（ⅱ）$0\leqq a\leqq \frac{1}{2}$ のとき	（ⅲ）$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき	（ⅳ）$1\leqq a$ のとき
			
最大　$f(1)$	最大　$f(1)$	最大　$f(0)$	最大　$f(0)$
最小　$f(0)$	最小　$f(a)$	最小　$f(a)$	最小　$f(1)$

なので、最大値は　$a\leqq \frac{1}{2}$ のとき、$M(a)=f(1)=a^2-2a+2$

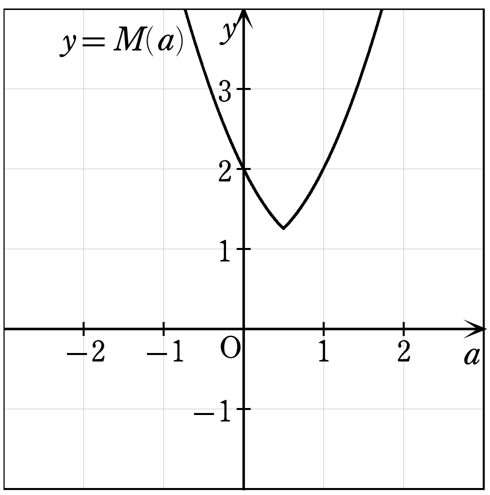
$a\geqq \frac{1}{2}$ のとき、$M(a)=f(0)=a^2+1$

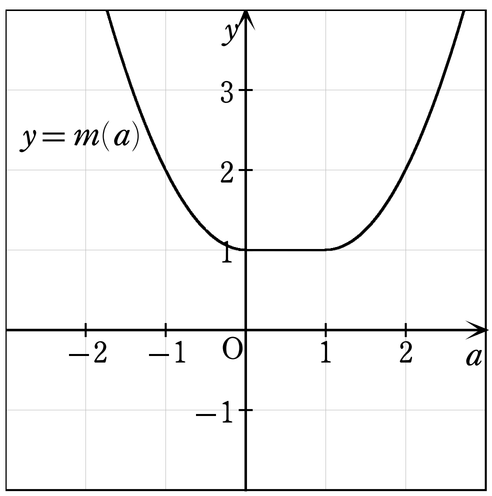
最小値は　$a\leqq 0$ のとき、$m(a)=f(0)=a^2+1$

$0\leqq a\leqq 1$ のとき、$m(a)=f(a)=1$

$a\geqq 1$ のとき、$m(a)=f(1)=a^2-2a+2$

よってこれをグラフにすると、下図のようになる。





■Remark■

２次関数の最大・最小で生徒が苦手とする問題の１つ。なぜこれが苦手かというと、それは何と言っても「場合分け」が必要だからである。場合に応じて答えが異なるということに対して、手におえないという生徒が多いけれども、考えてみれば誰だって話す相手が違えば対応は違うはずだし、色々な場合に色々な対応をしているんじゃないですか？世の中では！そう、場合分けなんて結局あなたが人生を歩んでいく上で当然のことなんですよ！だから「数学は人生」なのです。

ってな話はおいといて、頂点や軸に変数が含まれているときの最大・最小ですが、まず「頂点が定義域の範囲にあるかないか」で場合分けをする。そして、本問のように最大値まで求めるときには、軸が定義域の中で左よりなのか、右よりなのかで最大値が異なるので、定義域の中央の点 $x=\dfrac{1}{2}$ で場合分けをする。場合分けを恐れないこと！

（自習問題７）

（1） $y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$ より、頂点は (a,a^2)

頂点の位置で場合分けをすると、

$a \leqq 0$ のとき、 $x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$ をとり、 $x=0$ で最小値 $2a^2$ をとる。

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき、 $x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$ をとり、 $x=a$ で最小値 a^2 をとる。

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき、 $x=0$ で最大値 $2a^2$ をとり、 $x=a$ で最小値 a^2 をとる。

$2 \leqq a$ のとき、 $x=0$ で最大値 $2a^2$ をとり、 $x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$ をとる。

（2）１つ１つの場合を考えると、

$a \leqq 0$ かつ $2a^2=20$ のとき、$a=-\sqrt{10}$

$0 \leqq a \leqq 1$ かつ $a^2=20$ のとき、これを満たす a は存在しない。

$1 \leqq a \leqq 2$ かつ $a^2=20$ のとき、これを満たす a は存在しない。

$2 \leqq a$ かつ $2a^2-4a+4=20$ のとき、$a=4$

よって、$a=-\sqrt{10},4$

$\boxed{1-8}$

（1） $f(x)=(x-1)^2+1$ より頂点は $(1,1)$

よって、定義域（$t \leqq x \leqq t+1$）の中に頂点の $x=1$ が含まれるか含まれないかで場合分けをする。

（ⅰ） $t+1 \leqq 1$ のとき、つまり $t \leqq 0$ のとき

$x=t+1$ で最小値をとるから、 $m(t)=t^2+1$

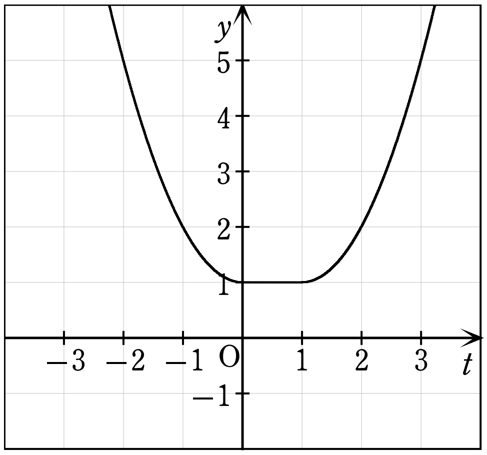
（ⅱ） $t \leqq 1 \leqq t+1$ のとき、つまり $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$x=1$ で最小値をとるから、 $m(t)=1$

（ⅲ） $1 \leqq t$ のとき

$x=t$ で最小値をとるから、 $m(t)=t^2-2t+2$

（2）グラフは右図。



■Remark■

定義域が $t \leqq x \leqq t+1$ であるから、これは幅が１であり、この幅１の定義域が動く。このとき、最小値に関しては、定義域の中に２次関数の軸が含まれていれば、その軸の位置で最小になり、含まれていなければ、定義域の端点で最小になる。これもやはり場合分けであり、１つ１つの場合を正確に理解すれば、難しくはない。面倒なだけである。

（自習問題 8）

（1） $f(x)=(x-1)^2-1$ より頂点は $(1,-1)$

よって、定義域（$t \leqq x \leqq t+1$）の中に頂点の $x=1$ が含まれるか含まれないかで場合分けをする。

（ⅰ） $t+1 \leqq 1$ のとき、つまり $t \leqq 0$ のとき

$x=t+1$ で最小値をとるから、 $m(t)=t^2-1$

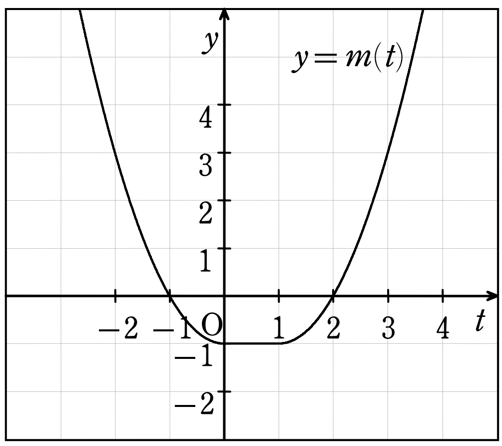
（ⅱ） $t \leqq 1 \leqq t+1$ のとき、つまり $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$x=1$ で最小値をとるから、 $m(t)=-1$

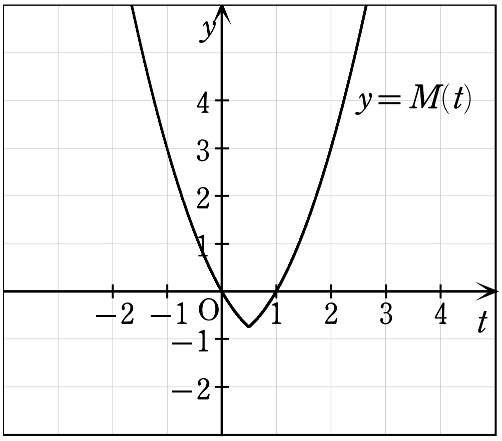
（ⅲ） $1 \leqq t$ のとき

$x=t$ で最小値をとるから、 $m(t)=t^2-2t$

グラフは右図。



（2）（1）と同様に、場合分けをするが、今度は定義域の中点 $x=\dfrac{2t+1}{2}$ と $x=1$ の大小関係によって最大値をとる状況が変わることに注意する。



（ｉ）$\dfrac{2t+1}{2}\leqq 1$ のとき、つまり $t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$x=t$ で最大値をとるから、$M(t)=t^2-2t$

（ⅱ）$1\leqq\dfrac{2t+1}{2}$ のとき、つまり $\dfrac{1}{2}\leqq t$ のとき

$x=t+1$ で最大値をとるから、$M(t)=t^2-1$

グラフは右図。

$\boxed{2-1}$

（1）$x+y=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})+2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=2\sqrt{5}$

$xy=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{4}{5-3}=2$　より

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2\sqrt{5})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{5}=40\sqrt{5}-12\sqrt{5}=28\sqrt{5}$

（2）（ア）$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ だから、$a=\sqrt{2}-1$

よって、$a+1=\sqrt{2}$ であり、両辺を２乗すると、$(a+1)^2=(\sqrt{2})^2$

$\therefore a^2+2a+1=2$　　$\therefore a^2+2a-1=0$

（イ）$a^4+4a^3+7a^2+6a+2$ を a^2+2a-1 で割ると、

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & a^2+2a+4 \\
a^2+2a-1\,\big) & a^4+4a^3+7a^2+6a+2 \\
 & \underline{a^4+2a^3-a^2} \\
 & 2a^3+8a^2+6a+2 \\
 & \underline{2a^3+4a^2-2a} \\
 & 4a^2+8a+2 \\
 & \underline{4a^2+8a-4} \\
 & 6
\end{array}
$$

となることから、$a^4+4a^3+7a^2+6a+2=(a^2+2a-1)(a^2+2a+4)+6$ と式変形でき、

（ア）より $a=\sqrt{2}-1$ のとき、$a^2+2a-1=0$ であるから、

$a=\sqrt{2}-1$ のとき、$a^4+4a^3+7a^2+6a+2=6$

■Remark■

（1）は対称式なので、「対象式は基本対称式で表せる」ことを利用する。

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ の変形は是非とも覚えておきたい。

（2）も有名な問題。$a+1=\sqrt{2}$ から $a^2+2a-1=0$ であるので、この式を利用して、与式の「次数下げ」を行う。次数下げを行うことが計算回避への道です。

（自習問題９）

$\alpha-3=-2\sqrt{2}$ より、両辺を２乗して、$(\alpha-3)^2=(-2\sqrt{2})^2$　　$\therefore \alpha^2-6\alpha+1=0$

この式を利用して与式を変形すると、

$\alpha^5-4\alpha^4-7\alpha^3-21\alpha^2-\alpha+2=(\alpha^2-6\alpha+1)(\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha+1)+\alpha+1$

となるので、この式に $\alpha=3-2\sqrt{2}$ を代入して、式の値は $4-2\sqrt{2}$

$\boxed{2-2}$

$f(\theta)=\dfrac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta-(-1)}{\cos\theta-(-3)}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 225^\circ)$ より、

xy 平面上に定点 $A(-3,-1)$ をとり、円 $x^2+y^2=1$ 上に動点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 225^\circ)$ をとると、

$f(\theta)$ は直線 AP の傾きを表す。A を通る傾き m の直線は $y+1=m(x+3)$ から $mx-y+3m-1=0\cdots$①で、

傾きを考えれば、$f(\theta)$ が最大になるのは、①と円が第２象限で接するときで、

$f(\theta)$ が最小になるのは、$P(\cos 225^\circ,\sin 225^\circ)$ となるときである。

最大のときは、「原点と①との距離＝円の半径」となるときだから、

$\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ であり、２乗して分母を払って、$(3m-1)^2=m^2+1$　$\therefore 4m^2-3m=0$ $\Leftrightarrow$ $m(4m-3)=0$

よって、$m=0,\dfrac{3}{4}$ であるが、第２象限で接する場合は明らかに $m=\dfrac{3}{4}$

また、最小のとき、$P(\cos 225^\circ,\sin 225^\circ)$ より、$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ を①に代入して、

$m=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-1}=\dfrac{5-2\sqrt{2}}{17}$　よって、最大値は $\dfrac{3}{4}$、最小値は $\dfrac{5-2\sqrt{2}}{17}$

■Remark■

数Ⅲまで学べば、直接この関数を微分して最大・最小を求めに行くことも可能になるが、分数関数の微分は式が複雑になる。分数を「直線の傾き」と捉えて、図形的に解釈して解く本問のような技術を体得しておきましょう。計算量が少ないということは、安全かつスピーディなのですから。

（自習問題 10）

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin x-0}{x-0}$ より、

$f(x)$ は原点 $O(0,0)$ と曲線 $y=\sin x\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上の点 $P(x,\sin x)$ を結ぶ直線の傾きを表す。

直線 OP の傾きが最小となるのは、$P\left(\dfrac{\pi}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ のときなので、

最小値は $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

$\boxed{2-3}$

$0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ における関数 $f(x)=\sin^3 x-3\sin x\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

$\sin x=t$ とおくと、$0\leqq t\leqq 1\cdots$①

$f(t)=t^3-3t(1-t^2)=4t^3-3t$ より、

$f'(t)=12t^2-3=3(2t+1)(2t-1)$

①のもとで、$f'(t)=0$ となるのは、$t=\dfrac{1}{2}$ のときで、

増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

よって、$f(t)$ は $t=1$、よって $\sin x=1$、つまり $x=90^\circ$ のとき最大値 1 をとり、

$t=\dfrac{1}{2}$、よって $\sin x=\dfrac{1}{2}$、つまり $x=30^\circ$ のとき最小値－1 をとる。

■Remark■

三角関数のままでも、数Ⅲの微分を使えば解くことはできる。しかし、有理関数に置換して考えた方が、計算が楽だし、増減表を書くのも容易であろう。もし、数Ⅲの微分を学んでもこちらの解法をしっかりと選択できるようにしておきなさい。

（自習問題 11）

$\cos\theta = x, \sin\theta = y$ とおくと、$x^2 + y^2 = 1$ である。

また、Ｐ$(5x, 4y)$ であり、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ から、Ｑ$(2x^2 - 1, 2xy)$

よって、ＰＱ$^2 = \{5x - (2x^2 - 1)\}^2 + (4y - 2xy)^2$

$$= (2x^2 - 5x - 1)^2 + 4y^2(2 - x)^2$$

$$= (2x^2 - 5x - 1)^2 + 4(1 - x^2)(2 - x)^2 \qquad (\because y^2 = 1 - x^2)$$

$$= -4x^3 + 9x^2 - 6x + 17$$

ここで、$f(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 17$ とおくと、$f'(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x - 1)(x - 1)$

また、$-1 \leqq x \leqq 1$ より、増減表は右図のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	36	↘	$\frac{63}{4}$	↗	16

よって、$x = \cos\theta = -1$ のとき、つまり $\theta = 180^\circ$ のとき最大値 36 をとり、

$x = \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき、つまり $\theta = 60^\circ, 120^\circ$ のとき最小値 $\frac{63}{4}$ をとる。

よって、ＰＱの最大値は $\theta = 180^\circ$ のとき６、最小値は $\theta = 60^\circ, 120^\circ$ のとき $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

■Remark■

ＰＱをそのまま定量するよりも、２乗したものを定量していく方が、計算上大変有利なのは言うまでもない。ここも計算回避の為に大切なところである。

$\boxed{2-4}$

与式は、$f(x)=\dfrac{x^2+6x+21}{x+3}=x+3+\dfrac{12}{x+3}$ と変形できる。

$x>-3$ より $x+3>0$ かつ $\dfrac{12}{x+3}>0$ なので、相加・相乗平均の不等式より

$f(x)\geqq 2\sqrt{(x+3)\cdot\dfrac{12}{x+3}}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$ が成り立ち、等号成立は $x+3=\dfrac{12}{x+3}$ のとき、つまり

$x^2+6x-3=0$ から $x=-3\pm2\sqrt{3}$、$x>-3$ より $x=-3+2\sqrt{3}$ のとき。

よって、最小値は $4\sqrt{3}\quad(x=-3+2\sqrt{3})$

■Remark■

さぁ、相加・相乗平均です。どうしても嫌なイメージをもっている人が多いみたいですね。相加平均とは「２つのものを足して２で割るという平均」、相乗平均とは「２つのものをかけて平方根をとる平均」です。平均のとり方が異なります。この違う平均のとり方をしたもの同士の関係を示しているのが、相加・相乗平均の関係式（不等式）です。これを使うためのポイントは２つのものをかけたときに、約分によって変数が無くなるという形をしていることです。「相加・相乗平均は忘れた頃にやってくる！」のでできるだけ意識しておくようにしましょう。自在に使えたらこりゃーかっこいい！

（自習問題 12）

$x>0, y>0, z>0$ より、相加・相乗平均の不等式から

$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)$$

$$\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}+2\sqrt{z\cdot\frac{1}{z}}+3\sqrt[3]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}}$$

$$=2+2+2+3=9$$

等号成立は $x=\dfrac{1}{x},\ y=\dfrac{1}{y},\ z=\dfrac{1}{z},\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{z}$ のときより　$x=y=z=1$ のとき。

よって、求める最小値は $\log_3 9=2$

■Remark■

３つの場合の相加・相乗平均

$x>0, y>0, z>0$ に対し、$\dfrac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}$

$\boxed{2-5}$

$x+y+z=5$ より、 $y+z=5-x$ …①

$xy+yz+zx=8$ より、 $yz=8-xy-zx=8-x(y+z)=x^2-5x+8=8-x(5-x)$ …②

①，②より、 y,z は t の２次方程式 $t^2-(5-x)t+x^2-5x+8=0$ …③の２解であるから、

「y,z が実数」$\Leftrightarrow$ ③の判別式≧0 $\Leftrightarrow \{-(5-x)\}^2-4(x^2-5x+8) \geqq 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2-10x+7 \leqq 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)(3x-7) \leqq 0 \quad \Leftrightarrow 1 \leqq x \leqq \frac{7}{3}$$

よって、最大値は $\dfrac{7}{3}\left(y=z=\dfrac{4}{3}\right)$ 最小値は $1\ (y=z=2)$

■Remark■

ポイントは「問題文をしっかり読んでいるかどうか」です。「x,y,z が実数」と何気なく書いてありますが、これがこの問題を解くカギになります。与えられた式から、「解と係数の関係」そして「実数解の存在条件」を意識することはできたでしょうか。この解法はなかなか思いつかないかもしれません。けれども、ちょっと考えてみれば、入試や定期試験の問題とは確実に存在する解答を復元する作業に他なりません。出題者から見れば「こうして解いて欲しい」という意図がある問題がほとんどです。その意図が理解できたらいいんですけどね！これが難しいんだな！

（自習問題 13）

（1） $xy=x(1-x)=-x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\ (0<x<1)$ より、$0<xy \leqq \dfrac{1}{4}$ よって、$4 \leqq \dfrac{1}{xy}$

（2） $x>0, y>0$ より

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2} \geqq 1+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2y^2}$$ （∵真ん中の２項に相加・相乗平均）

$$=(1+\frac{1}{xy})^2$$

ここで、$\dfrac{1}{xy}=t$ とおくと、（1）より $t \geqq 4$ であり、 $f(t)=(1+t)^2$ とおくと、

$f(t)$ は $t=4$ のとき最小値 25 をとる。

この値をとるのは、相加・相乗平均の不等式など、すべての等号が成立するときだから、

$\dfrac{1}{xy}=4$ かつ $x+y=1$ より、 $x=y=\dfrac{1}{2}$ のとき。 よって、最小値は 25 （$x=y=\dfrac{1}{2}$）

$\boxed{2-6}$

$x^2+ax+b=0$ の２つの解が α,β だから、

解と係数の関係より $\begin{cases}\alpha+\beta=-a \\ \alpha\beta=b\end{cases}$

また、$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{a^2-2b}{b}$

$\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{\beta-1+\alpha-1}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\dfrac{-a-2}{b+a+1}$ より、

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1} \Leftrightarrow \dfrac{a^2-2b}{b}=\dfrac{-a-2}{b+a+1}$

両辺の分母を払って整理すると、$a^3+a^2b+a^2-ab-2b^2=0$

$$\Leftrightarrow 2b^2-(a^2-a)b-a(a^2+a)=0$$

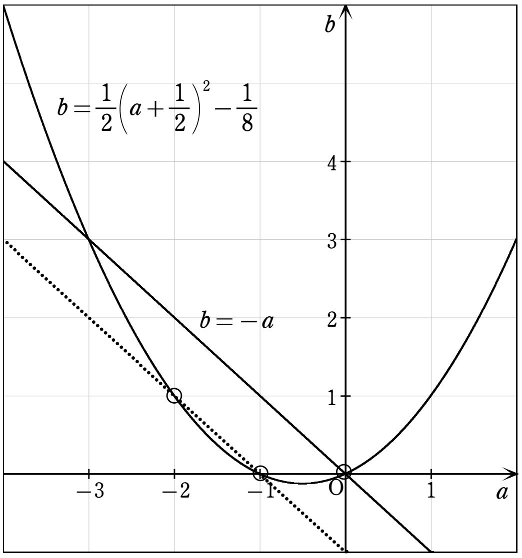
$$\Leftrightarrow \{2b-(a^2+a)\}(b+a)=0$$

$$\Leftrightarrow 2b-(a^2+a)=0\cdots① \quad \text{または} \quad b+a=0\cdots②$$

①より　$b=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{8}\cdots③$

②より　$b=-a\cdots④$

よって、求める図形は、「③かつ④かつ $b\neq 0, a+b\neq -1$（もともとある条件）」より下図のようになる。



■Remark■

「対称式は基本対称式を使って表せる」ことをわすれずに。後半の a と b の式の因数分解では、b の方が次数が低いので、b について整理します。因数分解の基本ですよね。忘れがちですけど。

（自習問題 14）

円 $C : x^2 + y^2 + x - 1 = 0$ と直線 $l : y - x - 1 = 0$ の交点を通る曲線の方程式は、

$s(x^2 + y^2 + x - 1) + t(y - x - 1) = 0 \cdots$①

①が円を表すためには、$s \neq 0$ であるので、s で割って $\dfrac{t}{s} = k$ とおくと、

$(x^2 + y^2 + x - 1) + k(y - x - 1) = 0 \cdots$②

よって、求める円 C' の方程式は②で表される。

②と x 軸の２つの交点の x 座標は、

②と $y = 0$ を連立して得られる２次方程式 $(x^2 + 0 + x - 1) + k(0 - x - 1) = 0$ の２つの異なる実数解である。

$\therefore x^2 + (1 - k)x - 1 - k = 0$

２つの実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと、

x 軸から切り取られる弦の長さは $\beta - \alpha$ であり、解と係数の関係から、$\begin{cases} \alpha + \beta = k - 1 \\ \alpha\beta = -1 - k \end{cases}$ である。

ここで、$(\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = (k - 1)^2 - 4(-1 - k) = k^2 + 2k + 5$ であり、

$\beta - \alpha = 2\sqrt{5}$ となることから、$k^2 + 2k + 5 = (2\sqrt{5})^2$

$\therefore k^2 + 2k - 15 = (k + 5)(k - 3) = 0 \quad \therefore k = -5, k = 3$

よって、求める円の方程式は　$k = -5$ のとき、$x^2 + y^2 + 6x - 5y + 4 = 0$

$k = 3$ のとき、$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$

$\boxed{3-1}$

$\lim_{x \to 3}(x - 3) = 0$ より、分子についても $\lim_{x \to 3}(x^2 + ax + b) = 0$ となることが必要。

よって、$9 + 3a + b = 0$ から $b = -3a - 9$

したがって、

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + ax - 3a - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + a + 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + a + 3) = 2$$

$\therefore a = -4 \qquad \therefore b = 3$

■Remark■

有名な問題。極限が有限確定値として存在する為に、分母・分子がともに極限値が 0 になることが必要です。そこから変形していきます。

（自習問題 15）

$\lim_{x \to 2}(x-2)=0$ より、分子についても $\lim_{x \to 2}(x^3+ax+b)=0$ となることが必要。

よって、$8+2a+b=0$ から $b=-2a-8$

したがって、

$$\lim_{x \to 2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{x^3+ax-2a-8}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+a+4)}{x-2}=\lim_{x \to 2}(x^2+2x+a+4)=1$$

$\therefore\ a=-11$　　　$\therefore\ b=14$

$\boxed{3-2}$

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim_{h \to 0}2\cdot\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=2\lim_{h \to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=2f'(x)$$

■Remark■

微分の定義式はサラサラサラララン！と書けるようにしておくこと！

（自習問題 16）

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{3h}=\lim_{h \to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=\frac{2}{3}\lim_{h \to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=\frac{2}{3}f'(x)$$

$\boxed{3-3}$

$y=x^3-3x^2-9x+7=f(x)$ とおくと、$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(2)=12-12-9=-9$ より、求める接線の方程式は $y-(-15)=-9(x-2)$

$$\therefore y=-9x+3$$

■Remark■

微分と接線の問題は切っても切れない関係です。この問題と次の $\boxed{3-4}$ は比較して理解しましょう。こちらは、曲線の上の点における接線を求める問題。次の $\boxed{3-4}$ は曲線の外の点から曲線に向かって接線を引く問題。どちらにも共通することは「接線問題は接点設定を優先する」ということです。こちらの問題は最初から接点が出ていますから、意識していませんが、$\boxed{3-4}$ は求める直線の方程式をおくのではなく、接点の設定を優先します。この技術を理解しているのと、していないのとでは大違い！

（自習問題 17）

$y=x^3+1=f(x)$ とおくと、 $f'(x)=3x^2$

傾きが３となる x 座標は、 $f'(x)=3x^2=3$ より $x=\pm 1$

$x=1$ のとき、 $y=2$ より、求める接線の方程式は $y-2=3(x-1)$

$$\therefore y=3x-1$$

$x=-1$ のとき、 $y=0$ より、求める接線の方程式は $y-0=3(x+1)$

$$\therefore y=3x+3$$

■Remark■

接線は２つ存在しますね。

$\boxed{\text{３－４}}$

$y=x^3+4=f(x)$ とおくと、 $f'(x)=3x^2$

曲線上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ より

$y=3t^2(x-t)+t^3+4=3t^2x-2t^3+4$

これが $(0,-12)$ を通るとき、 $-12=-2t^3+4$

$\therefore (t-2)(t^2+2t+4)=0$

これを満たす実数 t は $t=2$

よって、求める接線の方程式は $y=12x-12$

■Remark■

t の３次方程式の実数解の個数と、引くことのできる接線の本数は一致します。ですから、実数解の個数を調べることで、引ける接線の本数を調べられます。この考え方はとってもスマート！ぜひ身に付けてください。

（自習問題 18）原点を通って、曲線に３本の接線が引けるような、定数 p の値の範囲を求めよ。

$y = x^3 + px^2 + 1 = f(x)$ とおくと、 $f'(x) = 3x^2 + 2px$

曲線上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ より

$y = (3t^2 + 2pt)(x - t) + t^3 + pt^2 + 1 = (3t^2 + 2pt)x - 2t^3 - pt^2 + 1$

これが原点を通るとき、 $0 = -2t^3 - pt^2 + 1$ より　$2t^3 + pt^2 - 1 = 0$ …①

よって、①が異なる３つの実数解をもてば、３本の接線が存在することになるので、その条件を求める。

$g(t) = 2t^3 + pt^2 - 1$ とおくと、 $g'(t) = 6t^2 + 2pt = 2t(3t + p)$

$g'(t) = 0$ となる t は $t = 0, -\dfrac{p}{3}$ であり、 p の正負によって場合分けをすると、

（ｉ） $p > 0$ のとき、増減表は下図。

t	$\cdots$	$-\dfrac{p}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	$\dfrac{p^3}{27} - 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって、 $\dfrac{p^3}{27} - 1 > 0$ ならば、異なる３つの実数解を持つことになるので、

$$p^3 > 27 \Leftrightarrow (p-3)(p^2 + 3p + 9) > 0 \Leftrightarrow p > 3$$

（ⅱ） $p < 0$ のとき、増減表は下図。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{p}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\dfrac{p^3}{27} - 1$	$\nearrow$

このときは、実数解は１つしか存在し得ない。

（ｉ）（ⅱ）より、３本の接線が引けるような定数 p の範囲は　 $p > 3$

■Remark■

考え方は明解なのですが、計算がちょっと大変かもしれません。前半と後半で自分が何を求めようとしているのか混乱しないように、どんな関数に対し、何を調べようとしているのかを明確にしつつ計算を進めましょう。