Mathematics Melody

テーマその０：平方完成

平方完成とは x の２次関数 $y=ax^2+bx+c$ に対して、

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

という形に変形することをいいます。「２次の因数の部分」と「それ以外の分数の部分」とに分析する（分ける）ことによって、２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の定性としてよく知られている放物線の頂点の座標が明確になります。

【例題】次の２次関数を平方完成し、頂点の座標を求めなさい。

(1)　$y=x^2+2x$

$=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$　　　頂点 $(-1,-1)$

(2)　$y=-x^2+x-1$

$=-(x^2-x)-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$　　　頂点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$

(3)　$y=2x^2-4x+1$

$=2(x^2-2x)+1=2(x-1)^2-2+1=2(x-1)^2-1$　　　頂点 $(1,-1)$

(4)　$y=-2x^2+2x-3$

$=-2(x^2-x)-3=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-3=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$　　　頂点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$

【練習問題】次の２次関数を平方完成し、頂点の座標を求めなさい。

(1)　$y=x^2-2x$

(2)　$y=-x^2-x-1$

(3)　$y=3x^2+12x-2$

(4)　$y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$

２次関数の基本事項

一般形：$y=ax^2+bx+c$

(p,q) を頂点とする放物線は $y=a(x-p)^2+q$

テーマその１：２次関数を克服する。

$\boxed{1-1}$（最大・最小と２次関数の決定）

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは点 $(4,-4)$ を通り、 $x=2$ のとき、最大値８をとる。

a,b,c の値を求めよ。

（自習問題１）

２次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で最大値４をとり、方程式 $f(x)=0$ は $x=1$ を解にもつ。

a,b,c の値を求めよ。

$\boxed{1-2}$ （２次関数の決定と定義域）

２次関数 $y = ax^2 - 8ax + b \ (a > 0, 2 \leqq x \leqq 5)$ の最大値が６で、最小値が－２である。

このとき、定数 a, b を求めよ。

（自習問題２）

$0 < a < 3$ とする。

関数 $y = x^2 - ax + b \ (0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が７、最小値が３であるとき、a, b の値を求めよ。

$\boxed{1-3}$ （条件があるときの最大・最小）

x, y が実数で $x^2+2y^2=1$ を満たすとき、$x+3y^2$ の最大値・最小値を求めよ。

（自習問題３）

$x \geqq 0, y \geqq 0, x+y=4$ のとき、$(x-1)y$ の最大値・最小値を求めよ。

$\boxed{\textbf{1－4}}$（$D=b^2-4ac \geqq 0$から最大・最小を求める）

$x^2+y^2=1$のとき、$3x+4y$の最大値・最小値を求めよ。

（自習問題４）

実数x, yが $x^2+y^2+xy+x-y-1=0$ を満たすとき、$x+2y$のとり得る値の範囲を求めよ。

1－5（２変数の２次関数の最小値）

x, y が実数のとき、 $x^2+2xy+2y^2+2y$ の最小値を求めよ。

（自習問題５）

x, y が実数のとき、 $x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\textbf{1－6}}$ （$y=a(f(x))^2+b(f(x))+c$の最大・最小）

xの関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$は最小値６をもち、 $f(0)=11$である。

このとき、 a,bを求めよ。

（自習問題６）

$a \geqq 2$のとき、 $f(x)=(x^2+2x)^2+a(x^2+2x)$の最小値を求めよ。

$\boxed{1-7}$ **（頂点が動く場合の最大・最小）**

$0 \leqq x \leqq 1$**における関数** $f(x)=x^2-2ax+a^2+1$ **の最大値** $M(a)$ **と最小値** $m(a)$ **を求めよ。**

また、そのグラフを描け。

（自習問題７）

a **を定数とするとき、２次関数** $y=x^2-2ax+2a^2$ **について**

(1)　区間 $0 \leqq x \leqq 2$ **におけるこの関数の最大値と最小値を求めよ。**

(2)　区間 $0 \leqq x \leqq 2$ **におけるこの関数の最小値が 20 であるとき、** a **の値を求めよ。**

$\boxed{1-8}$ （定義域が動く場合の最大・最小）

$t \leqq x \leqq t+1$ における関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の最小値を $m(t)$ とする。

(1) $m(t)$ を求めよ。

(2) $y=m(t)$ のグラフを描け。

（自習問題 8）

関数 $f(x)=x^2-2x$ の区間 $t \leqq x \leqq t+1$ における最小値 m と最大値 M は t の関数になる。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $m(t)$ を求め、 $y=m(t)$ のグラフを描け。

(2) $M(t)$ を求め、 $y=M(t)$ のグラフを描け。

テーマその２：計算回避の技法を身に付ける。

2－1（２次以上の計算を回避せよ）

次の問いに答えよ。

(1) $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき、x^3+y^3 の値を求めよ。

(2) $\sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき、次の式の値を求めよ。

（ア） a^2+2a-1

（イ） $a^4+4a^3+7a^2+6a+2$

（自習問題９）

$\alpha=3-2\sqrt{2}$ のとき、$\alpha^5-4\alpha^4-7\alpha^3-21\alpha^2-\alpha+2$ の値を求めよ。

$\boxed{2-2}$ （分数関数は直線の傾きに帰着させよ）

$f(\theta)=\dfrac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 225^\circ)$ の最大値・最小値を求めよ。

（自習問題 10）

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき、 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2-3}$ （三角関数は有理関数へ帰着させよ）

$0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ における関数 $f(x)=\sin^3 x-3\sin x\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

（自習問題 11）

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき、座標平面上の２点P $(5\cos\theta, 4\sin\theta)$, Q $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ の距離の最大値・最小値とそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{2-4}$ （相加・相乗平均の関係を利用せよ）

関数 $f(x)=\dfrac{x^2+6x+21}{x+3}\quad(x>-3)$ の最小値と、最小値を与える x の値を求めよ。

（自習問題 12）

$x>0, y>0, z>0$ のとき、$\log_3\left(x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}\right)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2-5}$（基本対称式を利用せよ）

実数 x, y, z が $x+y+z=5$， $xy+yz+zx=8$ を満たして変化するとき、

x の最大値と最小値を求めよ。

（自習問題 13）

$x>0, y>0$ で、 $x+y=1$ のとき、

(1) $\dfrac{1}{xy}$ がとる値の範囲を求めよ。

(2) $(1+\dfrac{1}{x^2})(1+\dfrac{1}{y^2})$ がとりうる値の最小値を求めよ。

$\boxed{2-6}$ （解と係数の関係を利用せよ）

a,b を実数、 $b\neq 0, a+b\neq -1$ とするとき、２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２つの解を α,β とする。$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}$ を満たすような a,b を座標とする点 (a,b) はどのような図形を描くか。

（自習問題 14）

円 $x^2+y^2+x-1=0$ と直線 $y-x-1=0$ との２つの交点を通り、x 軸から切り取られる弦の長さが $2\sqrt{5}$ となるような円の方程式を求めよ。

テーマその３：数Ⅱの復習。

$\boxed{\textbf{3－1}}$ （極限値）

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 2$ のとき、 a, b の値を求めよ。

（自習問題 15）

$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + ax + b}{x - 2} = 1$ が成り立つように、 a, b の値を定めよ。

$\boxed{3-2}$ **（微分係数）**

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}$ **を** $f'(x)$ **を用いて表せ。**

（自習問題 16）

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+2h)-f(x)}{3h}$ **を** $f'(x)$ **を用いて表せ。**

$\boxed{\mathbf{3-3}}$ （曲線上の点における接線）

曲線 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ 上の点 $(2, -15)$ における接線の方程式を求めよ。

（自習問題 17）

曲線 $y = x^3 + 1$ の接線で傾きが 3 であるものの方程式を求めよ。

$\boxed{3-4}$ （曲線外の点から引いた接線）

点 $(0,-12)$ **から曲線** $y=x^3+4$ **に引いた接線の方程式を求めよ。**

（自習問題 18）

原点を通って、曲線 $y=x^3+px^2+1$ **に 3 本の接線が引けるような、定数** p **の値の範囲を求めよ。**