1-1.

（１）（与式）$=4x^2+12xy+9y^2-(9x^2+30xy+25y^2)$

$$=4x^2+12xy+9y^2-9x^2-30xy-25y^2$$

$$=-5x^2-18xy-16y^2$$

（２）（与式）$=x^2+(-3x^2)^2+(4x^3)^2+2\cdot x\cdot(-3x^2)+2\cdot(-3x^2)\cdot(4x^3)+2\cdot(4x^3)\cdot x$

$$=16x^6-24x^5+17x^4-6x^3+x^2$$

（３）（与式）$=\{(2a-3)(2a+3)\}^3$

$$=(4a^2-9)^3$$

$$=(4a^2)^3+3\cdot(4a^2)^2\cdot(-9)+3\cdot(4a^2)\cdot(-9)^2+(-9)^3$$

$$=64a^6-432a^4+972a^2-729$$

（４）（与式）$=\{(3x+y)^2\}^2$

$$=(9x^2+6xy+y^2)^2$$

$$=(9x^2)^2+(6xy)^2+(y^2)^2+2\cdot(9x^2)\cdot(6xy)+2\cdot(6xy)\cdot y^2+2\cdot y^2\cdot(9x^2)$$

$$=81x^4+108x^3y+54x^2y^2+12xy^3+y^4$$

〔別解〕二項定理より

（与式）$={}_4\mathrm{C}_4(3x)^4+{}_4\mathrm{C}_3(3x)^3(y^2)+{}_4\mathrm{C}_2(3x)^2(y^2)^2+{}_4\mathrm{C}_1(3x)^1(y^2)^3+{}_4\mathrm{C}_0(y^2)^4$

$$=81x^4+108x^3y+54x^2y^2+12xy^3+y^4$$

1-2.

（１）$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

（２）（１）の結果に代入して　$0=-36-3abc$

$$\therefore abc=-12$$

1-3.

（１）（与式）$=a(a-b)+c(a-b)=(a-b)(a+c)$

（２）（与式）$=2y(x^2-8x+15)=2y(x-3)(x-5)$

（３）（与式）$=y(2x^2-17x+30)=y(x-6)(2x-5)$

（４） $a+b=M$ おくと

（与式） $=2M^2+7M-15$

$=(2M-3)(M+5)$

$=\{2(a+b)-3\}\{(a+b)+5\}$

$=(2a+2b-3)(a+b+5)$

（５）（与式） $=2\{8x^3+27(y+2)^3\}$

$=2[(2x)^3+\{3(y+2)\}^3]$

$=2\{2x+3(y+2)\}[(2x)^2-2x\cdot 3(y+2)+\{3(y+2)\}^2]$

$=2(2x+3y+6)(4x^2-6xy+9y^2-12x+36y-36)$

（６）（与式） $=\{(x-4y)-(y-4x)\}\{(x-4y)^2+(x-4y)(y-4x)+(y-4x)^2\}$

$=(5x-5y)(x^2-8xy+16y^2+xy-4x^2-4y^2+16xy+y^2-8xy+16x^2)$

$=5(x-y)(13x^2+xy+13y^2)$

（７）（与式） $=(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)-24$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-24$

（ $x^2-5x=M$ とおくと）

$=(M+4)(M+6)-24$

$=M^2+10M+24-24$

$=M^2+10M$

$=M(M+10)$

$=(x^2-5x)(x^2-5x+10)$

$=x(x-5)(x^2-5x+10)$

（８）（与式） $=2x^2+(-5y+5)x+2y^2-7y+3$

$=2x^2+(-5y+5)x+(y-3)(2y-1)$

$=\{x-(2y-1)\}\{2x-(y-3)\}$

$=(x-2y+1)(2x-y+3)$

1-4.

（１） $a^2 = x$ 　とおくと

（与式） $= 9x^2 - 82x + 9$

$= (x-9)(9x-1)$

$= (a^2 - 9)(9a^2 - 1)$

$= (a+3)(a-3)(3a+1)(3a-1)$

（２）（与式） $= xy(x+y+z) + (x+y+z)$

$= (x+y+z)(xy+1)$

〔別解〕

（与式） $= x(xy+1) + y(xy+1) + z(xy+1)$

$= (xy+1)(x+y+z)$

（３）（与式） $= (x+y+z)^3 - x^3 - (y^3 + z^3)$

$= \{(x+y+z) - x\}\{(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2\} - (y^3 + z^3)$

$= (y+z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + x^2 + xy + zx + x^2) - (y+z)(y^2 - yz + z^2)$

$= (y+z)\{3x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 2yz + 3zx - (y^2 - yz + z^2)\}$

$= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx)$

$= 3(y+z)\{x(x+y) + z(x+y)\}$

$= 3(x+y)(y+z)(z+x)$

（４）（与式） $= (x^2 + 2x + 1)a + x^3 + x^2 + x$

$= (x+1)^2 a + x(x+1)^2$

$= (x+1)^2 (x+a)$

2-1.

両辺を$(3+\sqrt{7})$倍して　$10+a\sqrt{7}=(b-2\sqrt{7})(3+\sqrt{7})=3b+b\sqrt{7}-6\sqrt{7}-14=(3b-14)+(b-6)\sqrt{7}$

両辺を比較して　$\begin{cases}10=3b-14\\ a=b-6\end{cases}$　これを解いて　$a=2, b=8$

2-2.

$$x+y=\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}+\frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=\frac{(3+\sqrt{6})^2+(3-\sqrt{6})^2}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{9+6\sqrt{6}+6+9-6\sqrt{6}+6}{9-6}=\frac{30}{3}=10$$

$$xy=\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}\cdot\frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=1$$

$$x-y=\frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}-\frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=\frac{(3+\sqrt{6})^2-(3-\sqrt{6})^2}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{9+6\sqrt{6}+6-(9-6\sqrt{6}+6)}{9-6}=\frac{12\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{6}$$

であるので、

（１）（与式）$=3(x+y)^2-2xy=3\cdot10^2-2\cdot1=298$

（２）（与式）$=(x-y)\{(x+y)^2-xy\}=4\sqrt{6}\cdot(10^2-1)=396\sqrt{6}$

2-3.

a,b,cは正の整数であり　$a<b<c$　より　$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき　$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{a}$　が成り立つので　$1<\dfrac{3}{a}$　から　$a<3$

よって　$a=1,2$

（ｉ）$a=1$のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$となるが、これを満たす$b,c$は存在しないので不適。

（ii）$a=2$のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$

このとき　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{b}$　が成り立つので　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{b}$　から　$b<4$

よって　$b=3$

$a=2, b=3$　から　$c=6$

以上より、$a=2,\ b=3,\ c=6$

3-1.

（１）（与式）$\Leftrightarrow\ 7-5x-5>1-3x+9\ \Leftrightarrow\ -2x>8\ \Leftrightarrow\ x<-4$

（２）$\dfrac{x}{2}+1<x-\dfrac{x-7}{3}\ \Leftrightarrow\ 3x+6<6x-2x+14\ \Leftrightarrow\ -x<8\ \Leftrightarrow\ x>-8\cdots①$

$x-\dfrac{x-7}{3}<\dfrac{x+14}{5}\ \Leftrightarrow\ 15x-5x+35<3x+42\ \Leftrightarrow\ 7x<7\ \Leftrightarrow\ x<1\cdots②$

①かつ②より $-8<x<1$

（３）$2\leqq|x+3|\ \Leftrightarrow\ x+3\leqq-2$ または $2\leqq x+3\ \Leftrightarrow\ x\leqq-5,\ -1\leqq x\cdots①$

$|x+3|<5\ \Leftrightarrow\ -5<x+3<5\ \Leftrightarrow\ -8<x<2\cdots②$

①かつ②より $-8<x\leqq-5,\ -1\leqq x<2$

3-2.

（１）$5x-1=M$ とおくと $3M^2+16M-12=0\ \Leftrightarrow\ (3M-2)(M+6)=0$

$(3(5x-1)-2)(5x-1+6)=0$

$(15x-5)(5x+5)=0$

$(3x-1)(x+1)=0$

$x=\dfrac{1}{3},\ -1$

（２）解の公式より

$$x=\frac{-(-\sqrt{10})\pm\sqrt{(-\sqrt{10})^2-6\cdot(-5)}}{6}=\frac{\sqrt{10}\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{6}$$

（３）（ｉ）$x\geqq1$のとき

$x^2-3=x-1\ \Leftrightarrow\ x^2-x-2=0\ \Leftrightarrow\ (x-2)(x+1)=0\ \Leftrightarrow\ x=2,-1$

$x\geqq1$ より $x=2$

（ⅱ）$x\leqq1$のとき

$x^2-3=-(x-1)\ \Leftrightarrow\ x^2+x-4=0\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$x\leqq1$ より $x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

（ｉ）（ⅱ）より $x=2,\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

3-3.

$2x^2-(2m-3)x+m+6=0\cdots$（＊）の判別式を D とすると重解をもつことから

$D=(2m-3)^2-4\cdot2\cdot(m+6)=4m^2-20m-39=0$

したがって $(2m+3)(2m-13)=0$ から $m=-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{13}{2}$ となるが、

（重解）＝$\left(\dfrac{-b}{2a}\right)=\dfrac{-\{-(2m-3)\}}{2\cdot2}=\dfrac{2m-3}{4}>0$ より $m>\dfrac{3}{2}$

よって $m=\dfrac{13}{2}$ が適する。

このとき重解は $\dfrac{2m-3}{4}=\dfrac{2\cdot\frac{13}{2}-3}{4}=\dfrac{5}{2}$

3-4. $2x^2-6x+k=0$ の判別式を D とする。

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot k=9-2k$

（ｉ）$D>0\iff 9-2k>0\iff k<\dfrac{9}{2}$ のとき ２個

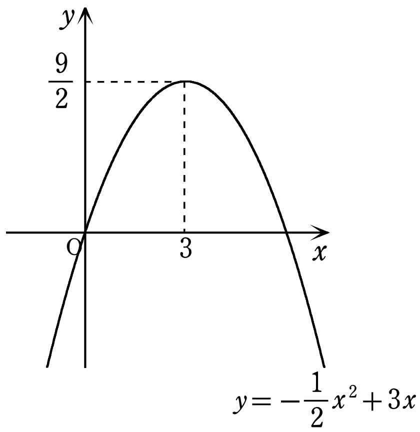
（ⅱ）$D=0\iff k=\dfrac{9}{2}$ のとき １個（重解）

（ⅲ）$D<0\iff k>\dfrac{9}{2}$ のとき ０個（なし）

3-5.

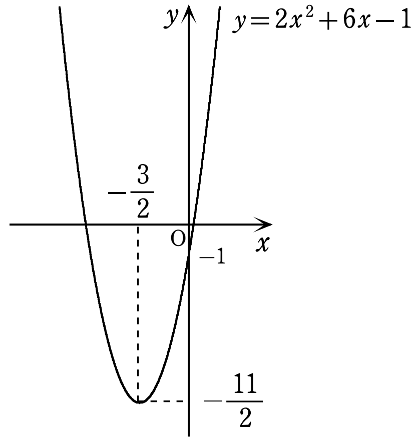
（１）$y=-\dfrac{1}{2}(x^2-6x)=-\dfrac{1}{2}\{(x-3)^2-9\}=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{9}{2}$

軸：$x=3$　　頂点：$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$



（２）$y=2(x^2+3x)-1=2\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\right\}-1=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{11}{2}$

軸：$x=-\dfrac{3}{2}$　　頂点：$\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$



3-6.

（１） $y = x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$ より 頂点は $(-3, -4)$

C_1 の頂点は、$(-3+2p,\ -4+p)$ であり、C_1 は x 軸に接することから、頂点の y 座標は 0

したがって、$-4 + p = 0$ $\quad \therefore p = 4$

このとき、C_1 の方程式は $y = \{x - (-3+2p)\}^2 - 4 + p = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

（２）逆にたどって、$y = -x^2 - 5x + 1$ のグラフを x 軸に対称に移動し、

x 軸方向に 3 だけ平行移動すると C_2 が得られる。

x 軸に対称に移動して $-y = -x^2 - 5x + 1 \iff y = x^2 + 5x - 1$

x 軸方向に 3 だけ平行移動して $y = (x-3)^2 + 5(x-3) - 1$

$$= x^2 - x - 7$$

3-7.

（１） $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

3 点を通ることから $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=2 \\ 16a-4b+c=2 \end{cases}$ これより $a=-1,\ b=-3,\ c=6$

よって $y = -x^2 - 3x + 6$

（２）頂点が $y = x + 2$ 上にあることから、頂点は $(a, a+2)$ と表せて、

グラフの式は $y = 2(x-a)^2 + a + 2$ とおける。

これが $(0,5)$ を通るから $5 = 2(0-a)^2 + a + 2 \iff 2a^2 + a - 3 = 0 \iff (a-1)(2a+3) = 0$

$$\therefore a = 1,\ -\frac{3}{2}$$

$a = 1$ のとき $y = 2x^2 - 4x + 5$

$a = -\dfrac{3}{2}$ のとき $y = 2x^2 + 6x + 5$

3-8.

$y = 4ax^2 - 20ax + b = 4a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 25a + b$ より 軸は $x = \frac{5}{2}$ （定義域の中に軸がある）

a の正負によって、グラフが「下に凸」か「上に凸」かが異なるので場合分けをする。

（ⅰ） $a > 0$ のとき

$x = 0$ のとき 最大値 4 となるので $b = 4$

$x = \frac{5}{2}$ のとき 最小値 -1 となるので $-25a + b = -1$

これより $a = \frac{1}{5},\ b = 4$

（ⅱ） $a < 0$ のとき

$x = \frac{5}{2}$ のとき 最大値 4 となるので $-25a + b = 4$

$x = 0$ のとき 最小値 -1 となるので $b = -1$

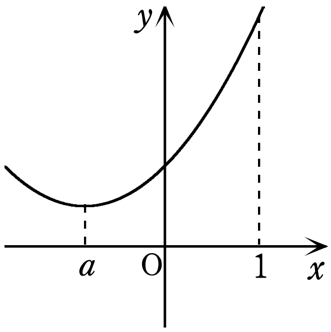
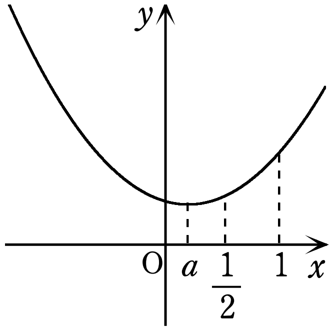
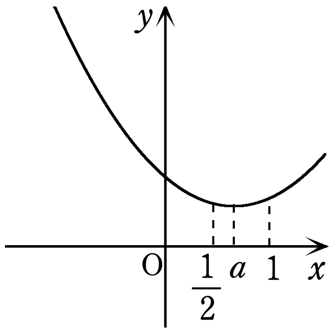
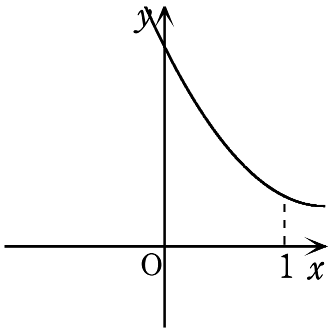
これより $a = -\frac{1}{5},\ b = -1$

以上より $a = \frac{1}{5},\ b = 4$ または $a = -\frac{1}{5},\ b = -1$

3-9.

$f(x)=x^2-2ax+a^2+1=(x-a)^2+1$ より、頂点の座標は $(a,1)$

よって、頂点（軸）の x 座標について場合分けをする。定義域は $0≦x≦1$ であり、

（ⅰ）$a≦0$ のとき	（ⅱ）$0≦a≦\frac{1}{2}$ のとき	（ⅲ）$\frac{1}{2}≦a≦1$ のとき	（ⅳ）$1≦a$ のとき
			
最大　$f(1)$	最大　$f(1)$	最大　$f(0)$	最大　$f(0)$
最小　$f(0)$	最小　$f(a)$	最小　$f(a)$	最小　$f(1)$

となるので、最大値は　$a≦\frac{1}{2}$ のとき、$M(a)=f(1)=a^2-2a+2$

$a≧\frac{1}{2}$ のとき、$M(a)=f(0)=a^2+1$

最小値は　$a≦0$ のとき、$m(a)=f(0)=a^2+1$

$0≦a≦1$ のとき、$m(a)=f(a)=1$

$a≧1$ のとき、$m(a)=f(1)=a^2-2a+2$

3-10.

（1） $f(x)=(x-1)^2+1$ より頂点は $(1,1)$

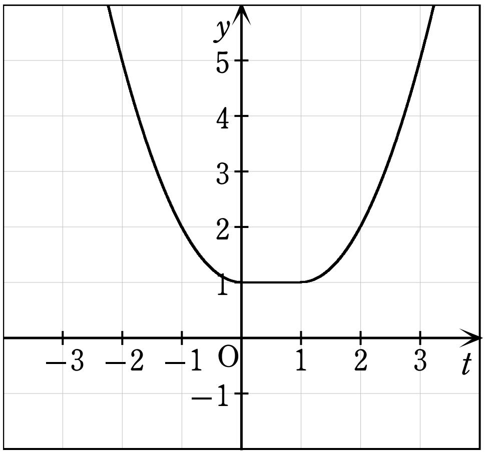
よって、定義域（$t \leqq x \leqq t+1$）の中に頂点の $x=1$ が含まれるか含まれないかで場合分けをする。

（i）$t+1 \leqq 1$ のとき、つまり $t \leqq 0$ のとき　$x=t+1$ で最小値をとるから、$m(t)=t^2+1$

（ii）$t \leqq 1 \leqq t+1$ のとき、つまり $0 \leqq t \leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値をとるから、$m(t)=1$

（iii）$1 \leqq t$ のとき、$x=t$ で最小値をとるから、$m(t)=t^2-2t+2$

（2） グラフは右図。



追加-1. 関数　$f(x)=(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-1$　について、次の問いに答えよ。

（1）$t=x^2-2x$ とおくとき、t のとりうる値の範囲を求めよ。

（2）関数 $y=f(x)$ を t で表し、最小値とそのときの x の値を求めよ。　〔帝塚山学院大〕

〔解答〕

（1）$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$　より　$t \geqq -1$

（2）$y=f(x)=(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-1$

$=t^2-6t-1$

$=(t-3)^2-10$

$t \geqq -1$　より　$t=3$　（$\Leftrightarrow$　$x^2-2x=3$　より　$x=3,-1$）のとき 最小値　-10　をとる。

追加-2. x の２次関数 $f(x)=x^2-2kx+3k^2-k$ の最小値を $g(k)$ とおく。$g(k)$ の最小値とそのときの k の値を求めよ。

〔創価大〕

〔解答〕

$f(x)=x^2-2kx+3k^2-k=(x-k)^2+2k^2-k$　より

最小値　$g(k)=2k^2-k=2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$　であるから、$k=\frac{1}{4}$　のとき　最小値　$-\frac{1}{8}$　をとる。

追加-3. $x\geqq 0,\ y\geqq 0$，$3x+2y=1$ のとき、$3x^2+4y^2$ の最大値・最小値とそれを与える x の値をそれぞれ求めよ。

〔阪南大〕

〔解答〕

$2y=1-3x\geqq 0$　から　$x\geqq 0$ と合わせて　$0\leqq x\leqq\frac{1}{3}\cdots$（＊）

（＊）のもとで、$3x^2+4y^2=3x^2+(2y)^2$

$$=3x^2+(1-3x)^2$$

$$=12x^2-6x+1$$

$$=12\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって、（＊）より　$3x^2+4y^2$　について　最大値　1　$(x=0,\ y=\frac{1}{2})$

最小値　$\frac{1}{4}$　$(x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{8})$