Mathematics Waltz

受験は、若者に与えられた一つの試練である。嫌ならば逃げるのもよかろう。
しかし、将来を見据え、困難に真摯に取り組むことができるのは若者の特権である。

内容

1-1. 次の計算をせよ。

（１） $(2x+3y)^2-(3x+5y)^2$

（２） $(x-3x^2+4x^3)^2$

（３） $(2a-3)^3(2a+3)^3$

（４） $(3x+y)^4$

1-2. 次の問いに答えよ。

（１） $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ を計算せよ。

（２） $a+b+c=0,\ a^3+b^3+c^3=-36$ のとき、abc の値を求めよ。

1-3. 次の式を因数分解せよ。

（１） $a^2-ab-bc+ac$

（２） $2x^2y-16xy+30y$

（３） $2x^2y-17xy+30y$

（４） $2(a+b)^2+7(a+b)-15$

（５） $16x^3+54(y+2)^3$

（６） $(x-4y)^3-(y-4x)^3$

（７） $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-24$

（８） $2x^2-5xy+2y^2+5x-7y+3$

1-4. 次の式を因数分解せよ。

（１）$9a^4-82a^2+9$

（２）$x^2y+xy^2+xyz+x+y+z$

（３）$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

（４）$a+(2a+1)x+(a+2)x^2+x^3$

2-1. $\dfrac{10+a\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=b-2\sqrt{7}$ を満たす有理数 a,b の値を求めよ。

2-2. $x=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}},\ y=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

（１） $3x^2+4xy+3y^2$

（２） $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

2-3. 正の整数a,b,cが条件 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1,\ a<b<c$ を満たすとき、a,b,cの値を求めよ。

3-1. 次の不等式を解け。

（1） $7-5(x+1)>1-3(x-3)$

（2） $\dfrac{x}{2}+1<x-\dfrac{x-7}{3}<\dfrac{x+14}{5}$

（3） $2\leqq|x+3|<5$

3-2. ２次方程式を解け。

（１） $3(5x-1)^2+16(5x-1)-12=0$

（２） $6x^2-2\sqrt{10}x-5=0$

（３） $x^2-3=|x-1|$

3-3. ２次方程式 $2x^2-(2m-3)x+m+6=0$ が正の重解をもつとき、m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

3-4. ２次方程式 $2x^2-6x+k=0$ の実数の解の個数は k の値によってどのように変わるか調べよ。

3-5. 次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めて、そのグラフをかけ。

（１） $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$　　（２） $y=2x^2+6x-1$

3-6. 次の問いに答えよ。

（１）２次関数 $y=x^2+6x+5$ のグラフを x 軸方向に $2p$ 、 y 軸方向に p だけ平行移動したグラフ C_1 は x 軸に接する。このとき、 p の値と C_1 の方程式を求めよ。

（２）２次関数のグラフ C_2 を x 軸方向に -3 だけ平行移動し、さらに x 軸に対称に移動したら、$y=-x^2-5x+1$ のグラフに一致した。このとき、C_2 の方程式を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。

3-7. 次のようなグラフをもつ２次関数を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。

（１）３点 $(1,2),(-1,8),(-4,2)$ を通る。

（２） $y=2x^2$ のグラフを平行移動したグラフで、点 $(0,5)$ を通り、頂点が直線 $y=x+2$ 上にある。

3-8. 2次関数 $y=4ax^2-20ax+b$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値が 4 、最小値が -1 であるとき、a,b の値を求めよ。

3-9. $0 \leqq x \leqq 1$における関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + 1$の最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

3-10. $t \leqq x \leqq t+1$ における関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の最小値を $m(t)$ とする。

（1） $m(t)$ を求めよ。

（2） $y=m(t)$ のグラフを描け。

追加-1. 関数　$f(x)=(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-1$ について、次の問いに答えよ。

（1）$t=x^2-2x$ とおくとき、t のとりうる値の範囲を求めよ。

（2）関数 $y=f(x)$ を t で表し、最小値とそのときの x の値を求めよ。　〔帝塚山学院大〕

追加-2. x の２次関数 $f(x)=x^2-2kx+3k^2-k$ の最小値を $g(k)$ とおく。

$g(k)$ の最小値とそのときの k の値を求めよ。 〔創価大〕

追加-3. $x \geqq 0,\ y \geqq 0$，$3x+2y=1$ のとき、$3x^2+4y^2$ の最大値・最小値とそれを与える x の値をそれぞれ求めよ。

〔阪南大〕