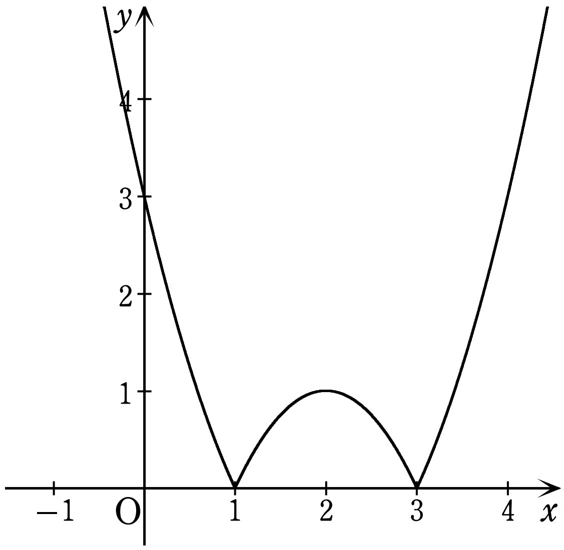
＜例題１－１＞　$y=|(x-1)(x-3)|$ のグラフを描け。

$x \leqq 1$，$x \geqq 3$ のとき $(x-1)(x-3) \geqq 0$ ，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき $(x-1)(x-3) \leqq 0$ であるから絶対値記号を外すと

$x \leqq 1$，$x \geqq 3$ のとき　$y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$y=-(x-1)(x-3)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

よってグラフは次の通り。



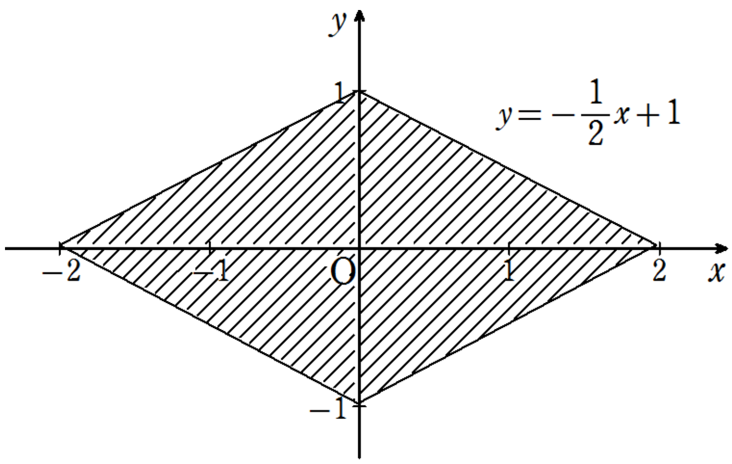
＜例題１－２＞　不等式 $|x|+2|y| \leqq 2$ で表される領域を図示せよ。

対称性を考えると，$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の領域を x 軸，y 軸，原点に関して対称に移動させた領域が求める領域となる。

$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ で考えると，不等式は $x+2y \leqq 2$ となり，変形して $y \leqq -\dfrac{1}{2}x+1$

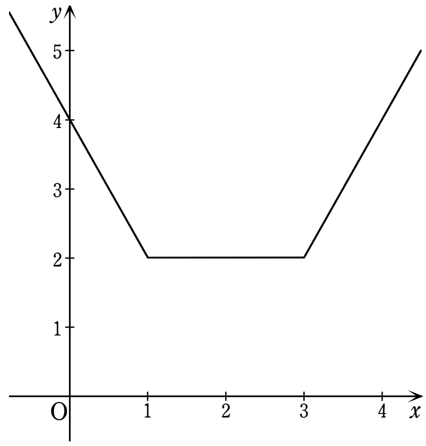
この領域は第１象限の直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ の下の部分である。

対称移動させた図形も考え，求める領域は下図の斜線部となる。ただし，境界線上の点も含む。



＜例題１－３＞ 次の式のグラフを描け。

（1） $y=|x-1|+|x-3|$



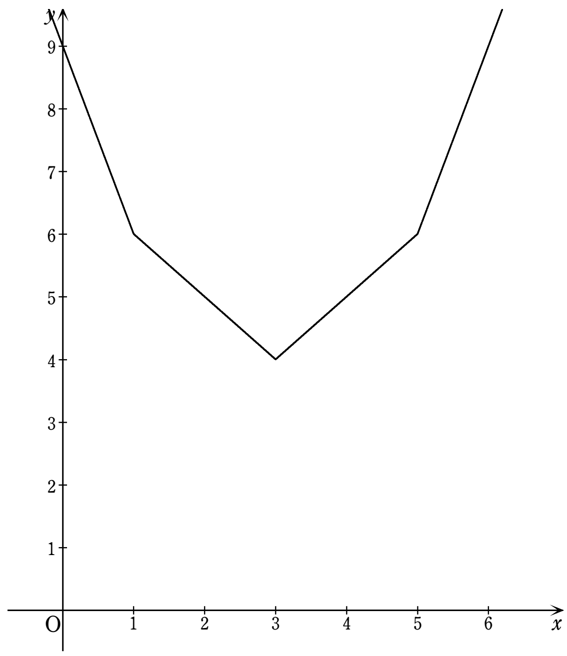
$x \leqq 1$ のとき　$y=-(x-1)-(x-3)=-2x+4$

$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$y=(x-1)-(x-3)=2$

$x \geqq 3$ のとき　$y=(x-1)+(x-3)=2x-4$

よりグラフは右図。

（2） $y=|x-1|+|x-3|+|x-5|$



$x \leqq 1$ のとき　$y=-(x-1)-(x-3)-(x-5)=-3x+9$

$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$y=(x-1)-(x-3)-(x-5)=-x+7$

$3 \leqq x \leqq 5$ のとき　$y=(x-1)+(x-3)-(x-5)=x+1$

$x \geqq 5$ のとき　$y=(x-1)+(x-3)+(x-5)=3x-9$

よりグラフは右図。

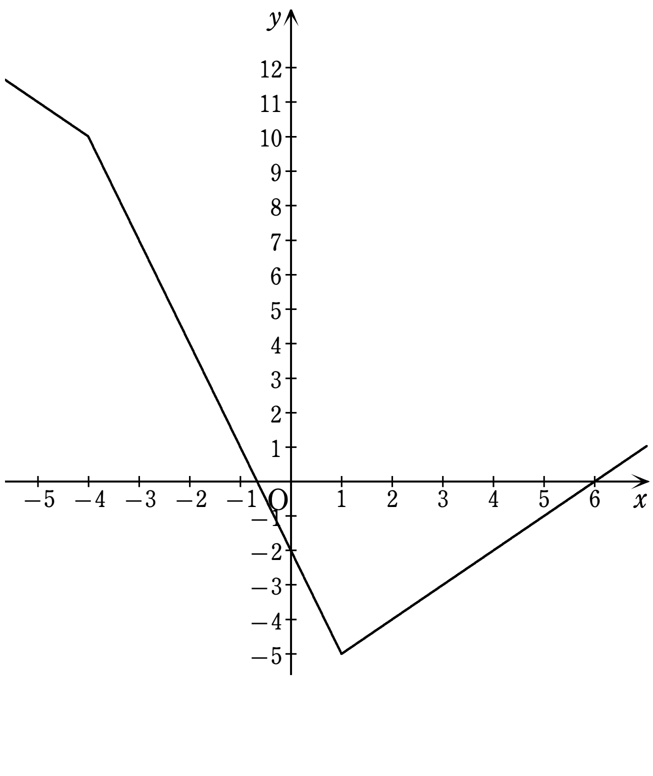
（3） $y=|2x-2|-|x+4|$

$x \leqq -4$ のとき　$y=-(2x-2)+(x+4)=-x+6$

$-4 \leqq x \leqq 1$ のとき　$y=-(2x-2)-(x+4)=-3x-2$

$x \geqq 1$ のとき　$y=(2x-2)-(x+4)=x-6$

よりグラフは右図。



＜例題１－４＞　$y=\left|2|2x-1|-1\right|$　$(0\leqq x\leqq 1)$ のグラフを描け。

内側の絶対値記号に関しては，$2x-1$ を 0 にする $x=\dfrac{1}{2}$ を境に絶対値記号の外し方が分かれる。

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，

内側に関しては $\left|2x-1\right|=-(2x-1)=-2x+1$ と外れ，中身の式は $2(-2x+1)-1=-4x+1$

$-4x+1\geqq 0$ のとき $x\leqq\dfrac{1}{4}$ であるから

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき，$y=-4x+1$

$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=-(-4x+1)=4x-1$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，

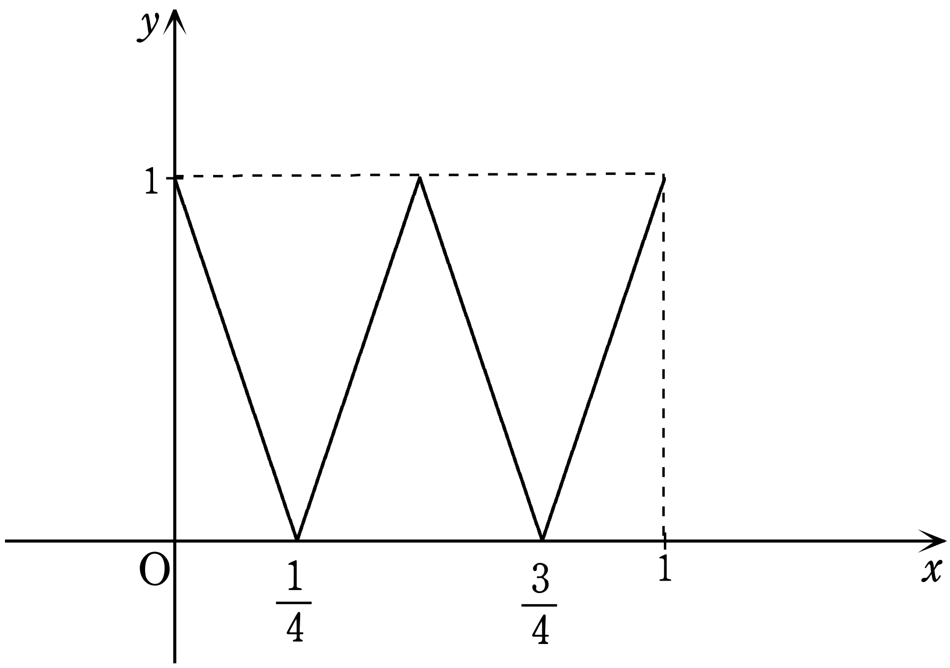
内側に関しては $\left|2x-1\right|=2x-1$ と外れ，中身の式は $2(2x-1)-1=4x-3$

$4x-3\geqq 0$ のとき $x\geqq\dfrac{3}{4}$ であるから

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき，$y=-(4x-3)=-4x+3$

$\dfrac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ のとき，$y=4x-3$

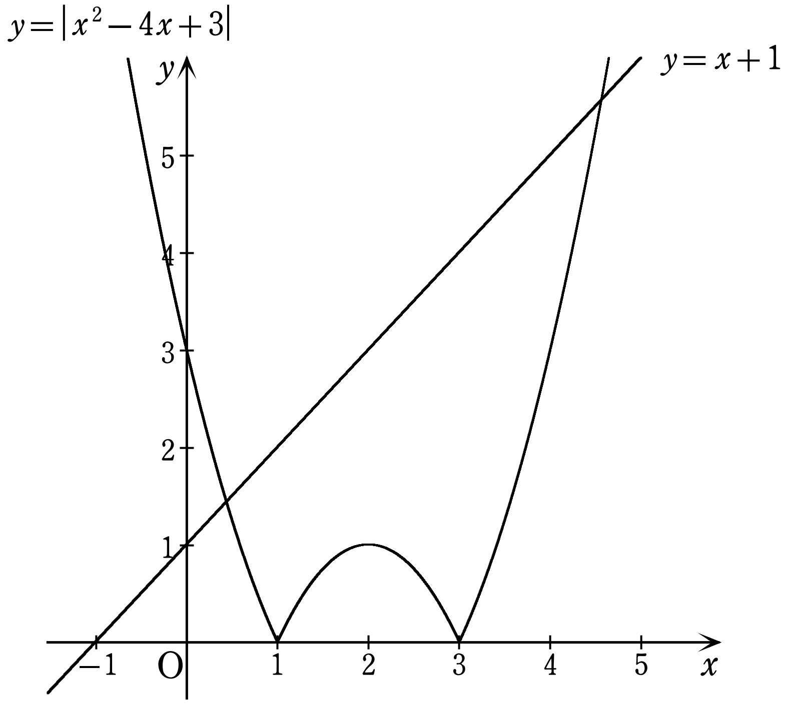
よって，グラフは次の通り。



＜実戦演習１＞

１－１.

（1）



（2）

（1)の $y=f(x)$ のグラフを利用する。

$y=g(x)$ のグラフは傾きが 1， y 切片が a の直線である。

$y=g(x)$ のグラフが $(1, 0)$ を通るとき　$a=-1$

$(3, 0)$ を通るとき　$a=-3$

$y=g(x)$ と $y=-(x^2-4x+3)$ のグラフが接するとき， $-x^2+4x-3=x+a$

すなわち　$x^2-3x+a+3=0$　の判別式を D とすると　$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(a+3)=0$

よって　$a=-\dfrac{3}{4}$

したがって，求める交点の個数は

$a<-3$　のとき　0 個

$a=-3$　のとき　1 個

$-3<a<-1,\ -\dfrac{3}{4}<a$　のとき　2 個

$a=-1,\ -\dfrac{3}{4}$　のとき　3 個

$-1<a<-\dfrac{3}{4}$　のとき　4 個

1－2.

（1）（ｉ）$x \geqq \frac{4}{3}$ のとき $3x-4<2x$ より $x<4$

よって $\frac{4}{3} \leqq x<4$

（ⅱ）$x \leqq \frac{4}{3}$ のとき $-(3x-4)<2x$ より $x>\frac{4}{5}$

よって $\frac{4}{5}<x \leqq \frac{4}{3}$

（ｉ）または（ⅱ）より $\frac{4}{5}<x<4$

（2）（ｉ）$x \leqq 1$ のとき $-(x-1)-2(x-3) \leqq 11$ より $x \geqq -\frac{4}{3}$

よって $-\frac{4}{3} \leqq x \leqq 1$

（ⅱ）$1 \leqq x \leqq 3$ のとき $(x-1)-2(x-3) \leqq 11$ より $x \geqq -6$

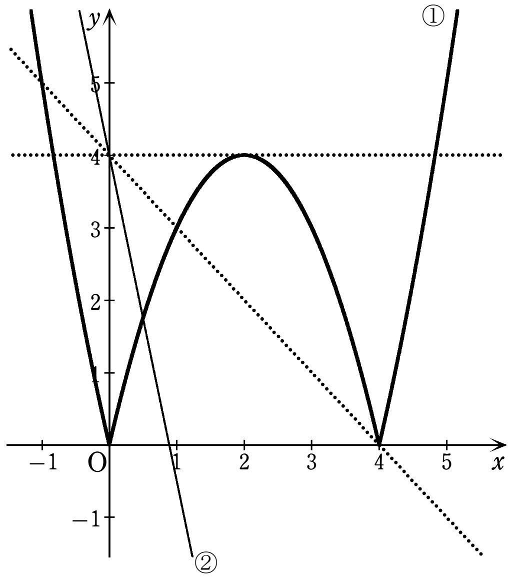
よって $1 \leqq x \leqq 3$

（ⅲ）$x \geqq 3$ のとき $(x-1)+2(x-3) \leqq 11$ より $x \leqq 6$

よって $3 \leqq x \leqq 6$

（ｉ）または（ⅱ）または（ⅲ）より $-\frac{4}{3} \leqq x \leqq 6$

1－3.



$y=\left|x(x-4)\right|$ …①，$y=-\frac{9}{2}x+4$ …②

$x \leqq 0,\ 4 \leqq x$ のとき $\left|x(x-4)\right|=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき $\left|x(x-4)\right|=-(x^2-4x)=-(x-2)^2+4$

よって，①のグラフと直線②の共有点の x 座標が正となるのは $0 \leqq x \leqq 4$ のときである。

$-(x^2-4x)=-\frac{9}{2}x+4$ とすると $2x^2-17x+8=0$

$(2x-1)(x-8)=0$

$x=\frac{1}{2},\ 8$ $0 \leqq x \leqq 4$ より $x=\frac{1}{2}$

よって，求める点の座標は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}\right)$

また，①のグラフと直線 $y=ax+4$ が 4 つの共有点をもつ a の値の範囲は，図から $-1<a<0$

1－4.

$$\left|\frac{1}{2}x^2-4x+6\right|=-x+6 \quad \cdots ① \text{ から } \left|\frac{1}{2}(x-2)(x-6)\right|=-x+6$$

（ｉ） $x \leqq 2,\ 6 \leqq x$ のとき　①は $\frac{1}{2}x^2-4x+6=-x+6$

$$x^2-6x=0$$
$$x(x-6)=0$$

$x=0,\ 6$　これは $x \leqq 2,\ 6 \leqq x$ をみたす。

（ⅱ） $2 \leqq x \leqq 6$ のとき　①は $-\left(\frac{1}{2}x^2-4x+6\right)=-x+6$

$$x^2-10x+24=0$$
$$(x-4)(x-6)=0$$

$2 \leqq x \leqq 6$ より　$x=4$

（ｉ）（ⅱ）より①の解は $x=0,\ 4,\ 6$ なので，すべての解の和は 10

また，$\left|-\frac{1}{2}x^2+2x-2\right|=\left|\frac{1}{2}x^2-4x+6\right| \quad \cdots ②$ から $\left|(x-2)^2\right|=\left|(x-2)(x-6)\right|$

（ｉ） $x \leqq 2,\ 6 \leqq x$ のとき　②は $x^2-4x+4=x^2-8x+12$

$x=2$　これは $x \leqq 2,\ 6 \leqq x$ をみたす

（ⅱ） $2 \leqq x \leqq 6$ のとき　②は $x^2-4x+4=-(x^2-8x+12)$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$x=2,\ 4$　これは $2 \leqq x \leqq 6$ をみたす。

（ｉ）（ⅱ）より②の解は $x=2,\ 4$ なので，すべての解の和は 6

また，①と②に共通する解は $x=4$

1－5.

（ｉ） $x \leqq 1$ のとき $-(x-1)-(x-2)=5$ より $x=-1$ これは $x \leqq 1$ をみたす。

（ⅱ） $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $(x-1)-(x-2)=5$ より $1=5$ となり不適。

（ⅲ） $x \geqq 2$ のとき $(x-1)+(x-2)=5$ より $x=4$ これは $x \geqq 2$ をみたす。

（ｉ）または（ⅱ）または（ⅲ）より $x=-1,\ 4$

1－6.

（ⅰ） $x \leqq 1$ のとき $x^2-7>-3(x-1)$

$$x^2+3x-10>0$$
$$(x+5)(x-2)>0$$
$$x<-5,\ 2<x$$

$x \leqq 1$ より $x<-5$

（ⅱ） $x \geqq 1$ のとき $x^2-7>3(x-1)$

$$x^2-3x-4>0$$
$$(x+1)(x-4)>0$$
$$x<-1,\ 4<x$$

$x \geqq 1$ より $x>4$

（ⅰ）または（ⅱ）より $x<-5,\ 4<x$

1－7.

$\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<\dfrac{18}{7}$ より $-\dfrac{18}{7}<x-\dfrac{2}{7}<\dfrac{18}{7}$ よって $-\dfrac{16}{7}<x<\dfrac{20}{7}$ となるので

整数解は $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の 5 個

$\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<a$ をみたす整数 x の個数が 4 であるとき，その整数解は $\dfrac{2}{7}$ からの距離が近い順に $0,\ 1,\ -1,\ 2$ である。5 番目に近い整数は -2 であるから 2 が不等式の解に含まれ，かつ -2 が不等式の解に含まれないような a の値の範囲を求めればよい。

よって $\left|2-\dfrac{2}{7}\right|<a$ かつ $\left|-2-\dfrac{2}{7}\right| \geqq a$ これを解くと $\dfrac{12}{7}<a \leqq \dfrac{16}{7}$

1－8.

$\left|4x^2-1\right|-\left|6x^2-x-2\right| \geqq 0$ より $\left|(2x+1)(2x-1)\right|-\left|(2x+1)(3x-2)\right| \geqq 0$

$\left|2x+1\right|\left(\left|2x-1\right|-\left|3x-2\right|\right) \geqq 0 \cdots$① と変形できる。

（ｉ）$\left|2x+1\right| \neq 0$ すなわち $x \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき

$\left|2x+1\right|(>0)$ で①の両辺を割って $\left|2x-1\right|-\left|3x-2\right| \geqq 0 \cdots$②

（ｉ－$\boxed{1}$）$x \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $x \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき

②は $-(2x-1)+(3x-2) \geqq 0$ となり $x \geqq 1$

$x \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $x \neq -\dfrac{1}{2}$ であるから $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$

（ｉ－$\boxed{2}$）$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

②は $(2x-1)+(3x-2) \geqq 0$ となり $x \geqq \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$ であるから $\dfrac{3}{5} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$

（ｉ－$\boxed{3}$）$x \geqq \dfrac{2}{3}$ のとき

②は $(2x-1)-(3x-2) \geqq 0$ となり $x \leqq 1$

$x \geqq \dfrac{2}{3}$ であるから $\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$

（ｉ－$\boxed{1}$）または（ｉ－$\boxed{2}$）または（ｉ－$\boxed{3}$）より $x \neq -\dfrac{1}{2}$ のときの解は $\dfrac{3}{5} \leqq x \leqq 1$

（ii）$\left|2x+1\right| = 0$ すなわち $x = -\dfrac{1}{2}$ のとき

$x = -\dfrac{1}{2}$ は不等式②をみたす。

（ｉ）または（ii）より，求める不等式の解は $x = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5} \leqq x \leqq 1$

1－9.

（1）$|x-3|<3$ より $-3<x-3<3$ よって $0<x<6$

（2）まず，$|x-3|<\dfrac{1}{2}x+a$ を解く。

（ⅰ）$x \geqq 3$ のとき

$x-3<\dfrac{1}{2}x+a$ から $x<2a+6$

（ⅰ－$\boxed{1}$）$2a+6 \geqq 3$，すなわち $a \geqq -\dfrac{3}{2}$ のとき　②をみたす x は存在しない。

（ⅰ－$\boxed{2}$）$3<2a+6$，すなわち $a>-\dfrac{3}{2}$ のとき　②の解は $3 \geqq x<2a+6$

（ⅱ）$x<3$ のとき

$-(x-3)<\dfrac{1}{2}x+a$ から $x>-\dfrac{2}{3}a+2$

（ⅱ－$\boxed{1}$）$3 \geqq -\dfrac{2}{3}a+2$，すなわち $a \geqq -\dfrac{3}{2}$ のとき

②をみたす x は存在しない。

（ⅱ－$\boxed{2}$）$-\dfrac{2}{3}a+2<3$，すなわち $a>-\dfrac{3}{2}$ のとき

②の解は $-\dfrac{2}{3}a+2<x<3$

（ⅰ）または（ⅱ）より②の解は $a>-\dfrac{3}{2}$ のとき $-\dfrac{2}{3}a+2<x<2a+6$

$a \geqq -\dfrac{3}{2}$ のとき 解なし

よって，②をみたす実数 x が存在する条件は $a>-\dfrac{3}{2}$

このとき，（ⅰ）より $x=3$ は②の解に必ず含まれ，かつ①の解 $0<x<6$ にも必ず含まれている。
すなわち，①と②をともにみたす実数として $x=3$ が存在する。

したがって，求める a の値の範囲は $a>-\dfrac{3}{2}$

（3）（2）より $a>-\dfrac{3}{2}$ のとき，②をみたす実数 x が存在し，その解は $-\dfrac{2}{3}a+2<x<2a+6$

よって，②をみたす実数 x のすべてが①をみたすとき，$0 \geqq -\dfrac{2}{3}a+2$ かつ $2a+6 \geqq 6$

これを解くと $a \geqq 3$ かつ $a \geqq 0$ より $a \geqq 0$

これと $a>-\dfrac{3}{2}$ との共通範囲が求める a の値の範囲であるから $-\dfrac{3}{2}<a \geqq 0$

＜例題２－１＞

（１）「$x=1$」$\Rightarrow$「$x^2=1$」が成り立つ。

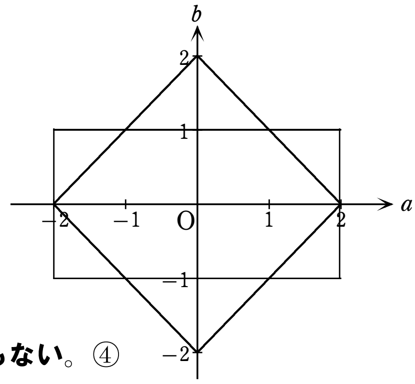
「$x^2=1$」$\Rightarrow$「$x=1$」は成り立たない。反例：$x=-1$

よって，**必要条件であるが十分条件ではない**。①

（２）「２組の向かい合う辺が平行」$\Leftrightarrow$「２本の対角線が互いに他を２等分する」が成り立つ。

よって，**必要十分条件である**。③

（３）それぞれの集合をみたす領域を考える。



領域$|a|\leqq 2$かつ$|b|\leqq 1$は，図の横長の長方形。

領域$|a+b|\leqq 2$かつ$|a-b|\leqq 2$は，正方形。

よって，一方が他方を含む関係にないから**必要条件でも十分条件でもない**。④

（４）「xが有限小数」$\Rightarrow$「xが有理数」が成り立つ。

$\Leftarrow$の反例は，$x=\dfrac{1}{3}$

よって，**必要条件であるが十分条件ではない**。①

（５）$4n+6=5n+10-(n+4)$が５の倍数になるのは，$n+4=5m$（mは整数）の形に書けるとき。

このとき，$n=5m-4$の形になる。$n\geqq 1$だから$m\geqq 1$となる。

また，$n=5k-4$のとき，４倍して　$4n=20k-16$

６たして　$4n+6=20k-10$

$=5(4k-2)$　より　$4n+6$は５の倍数

よって，**必要十分条件である**。③

＜例題２－２＞

Aは，$x=y=z=0$と同じ。

Bのとき，$x+y+z=0$，$xy+yz+zx=0$からzを消去すると，

$$xy-(x+y)^2=0$$
$$x^2+xy+y^2=0$$
$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$$

x, yは実数だから　$x+\dfrac{y}{2}=0,\ y=0$　　よって，$x=y=0$　　$\therefore z=0$

つまり，$A\Leftrightarrow B$だから，AはBであるための**必要十分条件である**。③

また，$A\Rightarrow C$が正しい（$\Leftarrow$の反例として$x=1,\ y=-1,\ z=0$）ので，

AはCであるための**十分条件であるが必要条件ではない**。②

＜実戦演習２＞

２－１.

（1）「$a^2>0$」⇒「$a>0$」は成り立たない。反例：$a=-1$

「$a>0$」⇒「$a^2>0$」は成り立つ。

よって，**必要条件であるが十分条件ではない**。①

（2）「$a=b=0$」⇒「$a+b=0$」は成り立つ。

「$a+b=0$」⇒「$a=b=0$」は成り立たない。反例：$a=1,\ b=-1$

よって，**十分条件であるが必要条件ではない**。②

（3）「$a=b$」⇒「$ac=bc$」は成り立つ。

「$ac=bc$」⇒「$a=b$」は成り立たない。反例：$a=1,\ b=2,\ c=0$

よって，**十分条件であるが必要条件ではない**。②

（4）$a=b=c$ は $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ であるための $\boxed{}$。

a,b,c は実数であるから，

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow\ a-b=0 \ \text{かつ}\ b-c=0\ \text{かつ}\ c-a=0$$

$$\Leftrightarrow\ a=b=c$$

よって，**必要十分条件である**。③

（5）$a-b=0$ であることは $|a-b|=|a+b|$ であるための $\boxed{}$。 （

「$a-b=0$」⇒「$|a-b|=|a+b|$」は成り立たない。反例：$a=b=1$

「$|a-b|=|a+b|$」⇒「$a-b=0$」は成り立たない。反例：$a=1,\ b=0$

よって，**必要条件でも十分条件でもない**。④

２－２.

条件をみたす集合を xy 平面上で考えると，$x^2+y^2=1$ は原点中心，半径１の円である。

「$x\leqq 1$ かつ $y\leqq 1$」は限りなく広がる長方形の領域である。

「原点中心，半径１の円」はこの長方形の領域に完全に含まれているので，

「$x^2+y^2=1$」⇒「$x\leqq 1$ かつ $y\leqq 1$」が成り立っている。

よって，**十分条件であるが必要条件ではない**。②

2－3．

（1）「$x=1$」⇒「$x^2=1$」は成り立つ。

「$x^2=1$」⇒「$x=1$」は成り立たない。反例：$x=-1$

よって，**十分条件**。②

（2）「$ab=0$」⇒「$a=0$」は成り立たない。反例：$a=1, b=0$

「$a=0$」⇒「$ab=0$」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（3）「$a=b$」⇔「$a-c=b-c$」が成り立つ。

よって，**必要十分条件**。③

（4）「$x+y=6$」⇒「$x=1, y=5$」は成り立たない。反例：$x=y=3$

「$x=1, y=5$」⇒「$x+y=6$」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（5）「$ac=bc$」⇒「$c=0$」は成り立たない。反例：$a=b=0, c=1$

「$c=0$」⇒「$ac=bc$」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（6）「$a=b, c=d$」⇒「$a+c=b+d$」は成り立つ。

「$a+c=b+d$」⇒「$a=b, c=d$」は成り立たない。反例：$a=1, b=-1, c=-1, d=1$

よって，**十分条件**。②

（7）「$a=b$」⇒「$a^2=b^2$」は成り立つ。

「$a^2=b^2$」⇒「$a=b$」は成り立たない。反例：$a=-b$

よって，**十分条件**。②

（8）「$a+b$，ab が整数」⇒「a，b が整数」は成り立たない。反例：$a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$

「a，b が整数」⇒「$a+b$ と ab が整数」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（9）「$a=b=0$」⇔「$a^2=b^2=0$」が成り立つ。

よって，**必要十分条件**。③

2－4．

「$x^2=y^2$」⇒「$x=y$」は成り立たない。反例：$x=-y$

「$x=y$」⇒「$x^2=y^2$」は成り立つ。

よって，**必要条件であるが十分条件ではない**。①

２－５.

（1）集合 $A=\{(x,y)\mid x>y\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid x^2>y^2\}$ とする。

$x^2>y^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x+y<0 \\ x-y<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y>-x \\ y<x \end{cases}$ または $\begin{cases} y<-x \\ y>x \end{cases}$ となる。

集合 A, B は互いに含まれるという関係にはない。よって，**必要条件でも十分条件でもない**。④

（2）$x^4>y^4 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2-y^2)>0$

$x^2+y^2 \geqq 0$ であり，上式において $x^2+y^2 \neq 0$ であるから

$x^4>y^4 \Leftrightarrow x^2-y^2>0 \Leftrightarrow x^2>y^2$

よって，**必要十分条件である**。③

（3）集合 $C=\{(x,y)\mid x+y>2\}=\{(x,y)\mid y>-x+2\}$

集合 $D=\{(x,y)\mid x>1$ または $y>1\}$

とすると，集合 D の表す領域に集合 C の表す領域は含まれる。

よって，**十分条件であるが必要条件ではない**。②

２－６.

（1）条件 p をみたす集合は 2, 3, 5, 7

条件 q をみたす集合は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

したがって，$p \Rightarrow q$ が成り立っている。

よって，p は q であるための**十分条件である**。

（2）条件 p ：図形 F は長方形である。　　条件 q ：図形 F は正方形である。

$q \Rightarrow p$ が成り立っている。

よって，p は q であるための**必要条件である**。

2－7.

（1）「$x=4$」⇒「$x^2-x-12=0$」は成り立つ。

「$x^2-x-12=0$」⇒「$x=4$」は成り立たない。反例：$x=-3$

よって，**十分条件**。②

（2）「$x^2>16$」⇒「$x>6$」は成り立たない。反例：$x=-5$

「$x>6$」⇒「$x^2>16$」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（3）$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left\{\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right\}$

a,b は実数より，$\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$

等号は，「$a+\dfrac{b}{2}=0$ かつ $b=0$」すなわち $a=b=0$ のときに成り立つ。

よって「$a>b$」⇔「$a^3>b^3$」が成り立つので，**必要十分条件**。③

（4）「$a<0$ または $b<0$」⇒「$ab<0$」は成り立たない。反例：$a=b=-1$

「$ab<0$」⇒「$a<0$ または $b<0$」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（5）$ab>0$ は「$a>0$ かつ $b>0$」または「$a<0$ かつ $b<0$」と同値。

このうち，$a+b>0$ もみたすのは「$a>0$ かつ $b>0$」

したがって「$a+b>0$ かつ $ab>0$」⇔「$a>0$ かつ $b>0$」が成り立つ。

よって，**必要十分条件**。③

（6）「ab が有理数である」⇒「a と b がともに有理数である」は成り立たない。反例：$a=b=\sqrt{2}$

「a と b がともに有理数である」⇒「ab が有理数である」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（7）「$a+b$ と ab がともに整数である」は，「a と b がともに整数である」は成り立たない。

反例：$a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{2}$

「a と b がともに整数である」は「$a+b$ と ab がともに整数である」は成り立つ。

よって，**必要条件**。①

（8）「n^2 が 2 の倍数である」⇔「n が 2 の倍数である」が成り立つ。

よって，**必要十分条件**。③

（9）「$30^\circ\leqq\theta\leqq 150^\circ$」⇒「$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$」は成り立つ。

「$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$」⇒「$30^\circ\leqq\theta\leqq 150^\circ$」は成り立たない。反例：$\theta=450^\circ$

よって，**十分条件**。②

２－８.

（1）「$x<-1$」⇒「$x^2 \geqq 1$」は成り立っている。

「$x^2 \geqq 1$」⇒「$x<-1$」は成り立っていない。反例：$x=2$

よって，**十分条件**である。

（2）「$x \leqq 2$」⇒「$x^2 \leqq 1$」は成り立っていない。反例：$x=2$

「$x^2 \leqq 1$」⇒「$x \leqq 2$」は成り立っている。

よって，**必要条件**である。

（3）$x^2<1 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$

$|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

よって，**必要十分条件**である。

（4）「$x>0$」⇒「$x^2>0$」は成り立つ。

「$x^2>0$」⇒「$x>0$」は成り立たない。反例：$x=-1$

よって，**十分条件**である。

（5）「$x^2>1$」⇒「$x>1$」は成り立っていない。反例：$x=-2$

「$x>1$」⇒「$x^2>1$」は成り立っている。

よって，**必要条件**である。

（6）$-2<x<3$ は $|x|<1$ であるための$\boxed{}$である。

$|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ であるから，集合として$|x|<1$は$-2<x<3$に含まれている。

よって，**必要条件**である。

2－9.

$x^2-10x+25-a^2=(x-5+a)(x-5-a)$ より条件 p は

$a>0$ のとき，$x<5-a,\ 5+a<x$

$a=0$ のとき，x は 5 以外のすべての実数

$a<0$ のとき，$x<5+a,\ 5-a<x$

$x^2-2(a+2)x+8a=(x-2a)(x-4)$ より条件 q は

$a>2$ のとき，$x<4,\ 2a<x$

$a=2$ のとき，x は 4 以外のすべての実数

$a<2$ のとき，$x<2a,\ 4<x$

条件 p をみたす集合を P，条件 q をみたす集合を Q とすると，p が q の十分条件となるためには，P$\subset$Q となればよい。

（ｉ）$a>2$ のとき

$\mathrm{P}=\{x\,|\,x<5-a,\ 5+a<x\}$

$\mathrm{Q}=\{x\,|\,x<4,\ 2a<x\}$

P$\subset$Q となるためには，「$5-a\leqq 4$ かつ $2a\leqq 5+a$」$\Leftrightarrow$「$a\geqq 1$ かつ $a\leqq 5$」

よって，$2<a\leqq 5$

（ⅱ）$a=2$ のとき

$\mathrm{P}=\{x\,|\,x<3,\ x>7\}$

$\mathrm{Q}=\{x\,|\,x$ は 4 以外のすべての実数$\}$

よって，P$\subset$Q は成り立っている。

（ⅲ）$0<a<2$ のとき

$\mathrm{P}=\{x\,|\,x<5-a,\ 5+a<x\}$

$\mathrm{Q}=\{x\,|\,x<2a,\ 4<x\}$

P$\subset$Q となるためには，「$5-a\leqq 2a$ かつ $4\leqq 5+a$」$\Leftrightarrow$「$a\geqq \dfrac{5}{3}$ かつ $a\geqq -1$」

よって，$\dfrac{5}{3}\leqq a<2$

（ⅳ）$a=0$ のとき

$\mathrm{P}=\{x\,|\,x$ は 5 以外のすべての実数$\}$

$\mathrm{Q}=\{x\,|\,x<0,\ 4<x\}$

よって，P$\subset$Q とはならないので不適。

（ｖ）$a<0$ のとき

$\mathrm{P}=\{x\,|\,x<5+a,\ 5-a<x\}$

$\mathrm{Q}=\{x\,|\,x<2a,\ 4<x\}$

P$\subset$Q となるためには，「$5+a\leqq 2a$ かつ $4\leqq 5-a$」$\Leftrightarrow$「$a\geqq 5$ かつ $a\leqq 1$」

これは不適である。

（ｉ）～（ｖ）をまとめると，$\dfrac{5}{3}\leqq a\leqq 5$

＜例題３－１＞

（１） $x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より　$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$

等号成立は　$x=\dfrac{1}{x}$　より　$x^2=1$，　$x>0$ より $x=1$ のとき

よって，求める最小値は　$2\ (x=1)$

（２） $x+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}-2$

$x+2>0$，　$\dfrac{9}{x+2}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$x+2+\dfrac{9}{x+2}-2 \geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\dfrac{9}{x+2}}-2=2\sqrt{9}-2=4$

等号成立は　$x+2=\dfrac{9}{x+2}$　より　$(x+2)^2=9 \Leftrightarrow x+2=\pm 3$

$x>0$ より $x=1$ のとき

よって，求める最小値は　4　（$x=1$）

（３） $\dfrac{x^2+3x+11}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x+2)+9}{x+1}=x+2+\dfrac{9}{x+1}=x+1+\dfrac{9}{x+1}+1$

$x+1>0$，　$\dfrac{9}{x+1}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$x+1+\dfrac{9}{x+1}+1 \geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{9}{x+1}}+1=2\sqrt{9}+1=7$

等号成立は　$x+1=\dfrac{9}{x+1}$　より　$(x+1)^2=9 \Leftrightarrow x+1=\pm 3$

$x>0$ より $x=2$ のとき

よって，求める最小値は　$7\ (x=2)$

＜例題３－２＞

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2x+\frac{1}{2x}\right)=2x^2+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2x^2}=2x^2+\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{2}$$

ここで，$2x^2>0$，$\frac{1}{2x^2}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$2x^2+\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{2} \geqq 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{1}{2x^2}}+\frac{5}{2}=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$$

等号成立は $2x^2=\frac{1}{2x^2}$ より $4x^4=1$

$x>0$ より $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

よって，求める最小値は $\frac{9}{2}$ $\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

＜例題３－３＞

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=1+\frac{9x}{y}+\frac{y}{x}+9=10+\frac{9x}{y}+\frac{y}{x}$$

ここで，$\frac{9x}{y}>0$，$\frac{y}{x}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$10+\frac{9x}{y}+\frac{y}{x} \geqq 10+2\sqrt{\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=10+2\sqrt{9}=16$$

等号成立は $\frac{9x}{y}=\frac{y}{x}$ より $9x^2=y^2$

$x>0,\ y>0$ より $3x=y$ のとき

よって，求める最小値は 16 （$3x=y$ のとき）

＜実戦演習３＞

３－１.

$$\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{2}{b}+\frac{2}{a}+\frac{1}{ab}=4+\frac{2a+2b+1}{ab}=4+\frac{2(a+b)+1}{ab}=4+\frac{3}{ab}$$

ここで，$a>0,\ b>0$ より 相加・相乗平均の不等式から

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\geqq\sqrt{ab}\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\geqq ab$　等号成立は $a=b$ と $a+b=1$ より $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき

よって $\dfrac{1}{ab}\geqq 4$ が成り立つ。

したがって，$4+\dfrac{3}{ab}\geqq 4+3\cdot 4=16$ であり，題意は示された。　　　　（証明終）

３－２.

$x<1$ のとき，$1-x>0$ である。

相加・相乗平均の不等式より

$$1-x+\frac{1}{1-x}\geqq 2\sqrt{(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}}=2$$

等号成立は $1-x=\dfrac{1}{1-x}$ より $(1-x)^2=1$，$x<1$ より $x=0$ のとき。

このとき，$y=x+\dfrac{1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1=1-\left(1-x+\dfrac{1}{1-x}\right)\leqq 1-2=-1$ であるから

求める最大値は $x=0$ のとき -1

３－３.

相加・相乗平均の不等式より

$$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

等号成立は $a=\dfrac{4}{a}$ より $a^2=4$，$a>0$ より $a=2$ のとき。

したがって，$a+\dfrac{4}{a}\geqq b$ をみたす最大の b は２

3－4.

$$(a+b)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{a}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c}$$

ここで，$\frac{a}{c}>0, \frac{b}{d}>0, \frac{a}{d}>0, \frac{b}{c}>0$ より，相加・相乗平均の不等式から

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}}+2\sqrt{\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{c}}=4\sqrt{\frac{ab}{cd}}$$

等号成立は $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ かつ $\frac{a}{d}=\frac{b}{c}$ より $a=b$ かつ $c=d$ のとき。

よって，題意は示された。(証明終)

3－5.

$x>0, \frac{16}{x}>0$ より 相加・相乗平均の不等式から

$$x+\frac{16}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=8$$

等号成立は $x=\frac{16}{x}$ より $x^2=16$，$x>0$ より $x=4$ のとき。

よって $x+\frac{16}{x}$ の最小値は 8（$x=4$）

また，$x+\frac{16}{x+2}=x+2+\frac{16}{x+2}-2$

$x+2>0$，$\frac{16}{x+2}>0$ より 相加・相乗平均の不等式から

$$x+2+\frac{16}{x+2}-2\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}-2=2\sqrt{16}-2=6$$

等号成立は $x+2=\frac{16}{x+2}$ より $(x+2)^2=16 \Leftrightarrow x+2=\pm 4$，$x>0$ より $x=2$ のとき。

よって，$x+\frac{16}{x+2}$ の最小値は 6（$x=2$）

3－6.

$\frac{x}{x^2+16}=\frac{1}{x+\frac{16}{x}}$ であり，**3－5** より，この式の分母は $x=4$ のとき，最小値 8 をとる。

分母・分子ともに正の数であり，分子は 1 なので，分母が最小のときにこの式は最大になる。

よって，最大値 $\frac{1}{8}$（$x=4$）

3－7.

$a>0,\ b>0,\ k>0$ より $ab>0$，$\dfrac{k^2}{ab}>0$ なので，相加・相乗平均の不等式より

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{k^2}{a}\right)=ab+\frac{k^2}{ab}+k^2+1\ \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{k^2}{ab}}+k^2+1=2k+k^2+1=(k+1)^2 \quad \cdots ①$$

等号成立は $ab=\dfrac{k^2}{ab}$ より $(ab)^2=k^2$，$ab=k$ のとき。

また，$a>0,\ b>0,\ c>0,\ k>0$ であるから，①において a を b に，b を c に置き換えると，

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right)\geqq(k+1)^2 \quad \cdots ②$$

等号成立は $bc=k$ のとき。

また，①において a を c に，b を a に置き換えると，

$$\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right)\geqq(k+1)^2 \quad \cdots ③$$

等号成立は $ca=k$ のとき。

②，③の両辺はすべて正であるから，辺々かけて

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right)\geqq(k+1)^4$$

等号成立は $bc=k$ かつ $ca=k$ より $a=b=\dfrac{k}{c}$ のとき。

3－8.

$$(3x+2y)\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}\right)=9+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+4=13+6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$\dfrac{x}{y}>0,\ \dfrac{y}{x}>0$ より，相加・相乗平均の不等式から

$$13+6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqq 13+6\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=25$$

等号成立は $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}$ より $x^2=y^2$，$x=y$ のとき。

よって求める最小値は 25

３－９.

（1） $abh=k^3$ であるから， $ab=\dfrac{k^3}{h}$

$a>0,\ b>0$ であるから，相加平均・相乗平均の不等式より

$$a^2+b^2+h^2 \geqq 2\sqrt{a^2\cdot b^2}+h^2=2ab+h^2=\frac{2k^3}{h}+h^2=\frac{h^3+2k^3}{h}$$

等号成立は $a=b=\sqrt{\dfrac{k^3}{h}}=k\sqrt{\dfrac{k}{h}}$ のとき。

したがって，対角線の長さの２乗の和の最小値は $\dfrac{h^3+2k^3}{h}$

（2）(1)より $\dfrac{h^3+2k^3}{h}$ が最小となる場合を考えればよい。

$h>0,\ k>0$ であるから，相加・相乗平均の関係式より

$$\frac{h^3+2k^3}{h}=h^2+\frac{2k^3}{h}=h^2+\frac{k^3}{h}+\frac{k^3}{h} \geqq 3\sqrt[3]{h^2\cdot\frac{k^3}{h}\cdot\frac{k^3}{h}}=3k^2$$ ←＜注＞参照

等号成立は $h^2=\dfrac{k^3}{h}$ すなわち $h=k$ のとき。

このとき， $a=b=k$ となる。

よって，対角線の長さが最小となるのは立方体のときである。

＜注＞ ３項の相加・相乗平均の不等式

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき $\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$

等号成立は $a=b=c$ のとき

3－10.

（1）（左辺）－（右辺）$=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$$=\frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$$ が成り立つ。

等号成立は$\sqrt{a}=\sqrt{b}$ より　$a=b$　のとき

（2）$2x>0,\ \dfrac{3}{x}>0$ より，（1）の不等式から　$2x+\dfrac{3}{x}\geqq 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{3}{x}}=2\sqrt{6}$

等号成立は　$2x=\dfrac{3}{x}$　より　$x^2=\dfrac{3}{2}$，　$x>0$ より　$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき。

よって，求める最小値は　$2\sqrt{6}$　（$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$）

（3）資源ごみ１トンあたりのリサイクル費用は　$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x}+1$

$\dfrac{x}{2}>0,\ \dfrac{8}{x}>0$ より，（1）の不等式から

$$\frac{x}{2}+\frac{8}{x}+1\geqq 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{8}{x}}+1=5$$

等号成立は　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{8}{x}$　より　$x^2=16$，　$x>0$ より　$x=4$ のとき。

よって，一度に４トンずつリサイクルするとき，１トンあたりのリサイクル費用は最小になり，そのときの費用は５

3－11．$2x+y=2$ の両辺に $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ をかけて，

$(2x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ 左辺を展開すると $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}+3$ であるから

$2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}+3$ である。

$x>0,\ y>0$ より，$\dfrac{2x}{y}>0,\ \dfrac{y}{x}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}+3 \geqq 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}+3=2\sqrt{2}+3$

等号成立は $\dfrac{2x}{y}=\dfrac{y}{x}$ と $2x+y=2$ より $x=2-\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2}-2$ のとき。

よって，$2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 2\sqrt{2}+3$ が成り立ち，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{2\sqrt{2}+3}{2}$ となる。

したがって，求める最小値は $\dfrac{2\sqrt{2}+3}{2}$ （$x=2-\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2}-2$ のとき）

3－12．

$$2b+\frac{2}{a+1}+\frac{2a+2}{b+2}=2\left(b+\frac{1}{a+1}+\frac{a+1}{b+2}\right)$$

$$=2\left(b+2+\frac{1}{a+1}+\frac{a+1}{b+2}-2\right)$$

$a>-1,\ b>-2$ より $b+2>0,\ \dfrac{1}{a+1}>0,\ \dfrac{a+1}{b+2}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$2\left(b+2+\frac{1}{a+1}+\frac{a+1}{b+2}-2\right)\geqq 2\left(3\sqrt[3]{(b+2)\cdot\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b+2}}-2\right)=2$$

等号成立は $b+2=\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+1}{b+2}$ より $a=0,\ b=-1$ のとき。

したがって，求める最小値は 2 （$a=0,\ b=-1$ のとき）