本日のおすすめ

１日目 :「絶対値」

２日目 :「必要条件と十分条件」

３日目 :「相加平均と相乗平均の不等式」

第１回「絶対値」

絶対値記号の外し方

$$A \geqq 0 \text{ のとき，} |A| = A$$

$$A \leqq 0 \text{ のとき，} |A| = -A$$

　つまり、絶対値記号で挟まれた式の中身の符号を見て、0 以上であればそのまま外し、0 以下であれば -1倍するということです。場合分けして絶対値記号を外しましょう。

数学物語（その１）

＜数学物語・登場人物＞

翠（みどり）…数学に一生懸命な女子高校生。どうしてそうなるのか、納得できるまで考える。
寛（ひろし）…数学が得意だと思っている男子高校生。答えが出ればいいという乱暴なところがある。
くぼじ…数学ナビゲーター。翠と寛の数学の授業を担当している。

翠：絶対値ってなんかよくわからなくて嫌いよ。中学１年生では、「数の＋や－の符号を取ったもの」って習った気がするんだけど、いつの間にか定義が変わってしまったような……。

寛：俺も絶対値ってあんまり好きじゃないな。場合分けが必要になって面倒だから。

翠：場合分けってどうして必要なのかしら。答えが分かれるの？答えは１つじゃないの？

くぼじ：おやおや、翠ちゃん、なんだか困っているようですね。確かに「絶対値」は数学の中でも特に嫌がる人の多い内容だね。ちゃんと理解してしまえばそんなに難しい内容でもないんですがね。寛くんの言っているように、絶対値を処理するときには場合分けが必要になったりすることが多いから、面倒でわかりにくくてみんなから嫌われてるんだろうな。せっかくだからちゃんと理解しておこうか。

翠：頑張って理解したいです。お願いします！

寛：俺はわかってるけど、翠に付き合って一緒に勉強してやるとするか。

くぼじ：まず、翠ちゃんの言っていた『中学１年生では、「数の＋や－の符号を取ったもの」って習った気がする』ということなんだけど、これは中学１年生の最初だけ通用するごまかしなんだ。負の数を習い始めたばかりの中学１年生が絶対値という概念を理解するのは結構大変なことで、そういう風に教えてしまう先生もいるんだよね。数字が実際にわかっているときにはそれで問題ないんだけど、文字が絶対値記号の中に含まれてしまうと、まったく通用しなくなってしまうんだ。

翠：そうだったんですか。ちゃんと教えてくれればいいのに。

くぼじ：例えば、+5という数の絶対値は5だから、$|+5|=5$ という式は正しい。しかし、

$|+a|=a$ ということを許してしまったら、$a=-5$ のときには $|-5|=-5$ という式を認めたことになってしまうんだね。これは間違っている。
だから、絶対値という記号は『＋や－の符号を取るということじゃない』ということをまずわかってもらいたいな。絶対値記号が主張していることは、「絶対値記号の中の関数を正の数にして返しなさい」ということなんだ。関数はふつう「変数」と言われる文字を含んでいる。変数である文字は正の数であることもあれば、負の数になることもある。文字自体が正か負かなんてわからないんだから、「符号を取る」なんてことはできないよね。そこで場合を分けて表現する必要が出てくる。だから場合分けがあるんだ。
翠ちゃんは誤解しているようだけど、場合分けってのは答えを２つ以上答えているわけじゃない。１つの答えを「分けないと表現できない」から仕方なく分けているんだ。分けないと答えようがないってことなんだよ。
生徒のみんなは、優しい先生と怖い先生、それぞれに態度が違うよね。本当は場合分けの達人なんだから、場合分けを嫌がっちゃいけないよ（笑）。

翠：はぁい。わかった気がします。

＜例題１－１＞　$y=|(x-1)(x-3)|$ のグラフを描け。

一般に，$y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフの $y<0$ の部分を，
x 軸に関して対称移動させたグラフになります。

＜例題１－２＞　不等式 $|x|+2|y|\leqq 2$ で表される領域を図示せよ。

＜例題１－３＞　次の式のグラフを描け。

（1）$y=|x-1|+|x-3|$

（2）$y=|x-1|+|x-3|+|x-5|$

（3）$y=|2x-2|-|x+4|$

＜例題１－４＞　$y=|2|2x-1|-1|$　$(0\leqq x\leqq 1)$ のグラフを描け。

＜実戦演習１＞

１－１．xの関数 $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$，$g(x)=x+a$（$a$は定数）について

（1）$y=f(x)$のグラフと$a=1$の場合の$y=g(x)$のグラフを１つの座標平面に描け。
（2）$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフの交点の個数を求めよ。（専修大・経，商，文）

１－２．次の不等式を解け。

（1）$\left|3x-4\right|<2x$

（2）$\left|x-1\right|+2\left|x-3\right|\leqq 11$ （西南学院大・文，経）

１－３．関数 $y=\left|x(x-4)\right|$ のグラフと直線 $y=-\dfrac{9}{2}x+4$ の２つの共有点のうち，x座標が正である点の座標を求めよ。また，関数 $y=\left|x(x-4)\right|$ のグラフと，直線 $y=ax+4$（aは定数）が４つの共有点をもつとき，aの値の範囲を求めよ。（福岡大・人文，経，商）

１－４．方程式 $\left|\dfrac{1}{2}x^2-4x+6\right|=-x+6$ のすべての解の和は$\boxed{}$であり，
もう１つの方程式$\left|-\dfrac{1}{2}x^2+2x-2\right|=\left|\dfrac{1}{2}x^2-4x+6\right|$ のすべての解の和は$\boxed{}$である。
また，これらの方程式に共通する解は$\boxed{}$である。（西南学院大・経，国際文化）

１－５．$\left|x-1\right|+\left|x-2\right|=5$ をみたす実数xの値を求めよ。（愛知工大・工，経営情報科学）

１－６．$x^2-7>3\left|x-1\right|$ を解け。（武庫川女子大）

１－７．不等式 $\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<\dfrac{18}{7}$ をみたす整数xの個数は$\boxed{}$である。正の数aに対して，
不等式$\left|x-\dfrac{2}{7}\right|<a$をみたす整数$x$の個数が４であるとき，$a$のとりうる値の範囲は$\boxed{}<a\leqq\boxed{}$である。

（京都産大・理，工，コンピュータ理工（推薦））

１−８．不等式 $\left|4x^2-1\right|-\left|6x^2-x-2\right| \geqq 0$ を解け。（昭和薬大）

１−９．a は実数の定数とし，２つの不等式 $|x-3|<3$ ……①，$|x-3|<\frac{1}{2}x+a$ ……②を考える。

（1）①を解くと $\boxed{} < x < \boxed{}$ である。

（2）①，②をともにみたす実数 x が存在するような a の値の範囲は $a > \boxed{}$ である。

（3）②をみたす実数 x が存在し，かつ②をみたす実数 x のすべてが①をみたすような a の値の範囲を求めると，$\boxed{} < a \leqq \boxed{}$ である。

（自治医大・看護）

第２回「必要条件と十分条件」

命題 「$p \Rightarrow q$」 が成り立つとき，　　　　（注：「$\Rightarrow$」は「ならば」と読む）

q はで p あるための必要条件

p は q であるための十分条件

という。

数学物語（その２）

翠：必要条件と十分条件かぁ、これってよくわからなかったの。数学なのに「必要」とか「十分」とか言われても困るわ。

くぼじ：翠ちゃん、「数学なのに」っていうのは違うんだよ。数学だからこそ、そういうことをしっかりと勉強する必要があるんだよ。

寛：どうして必要とか、十分とかっていう言葉が出てくるんだろう？

くぼじ：そうか、２人とも必要・十分という言葉と数学の数式との間に壁を感じているんだね。じゃあ、こういう風に考えたらどうだろう。翠ちゃんはどこに住んでいるんだっけ？

翠：東京の武蔵野市です。

くぼじ：じゃあ、武蔵野市民なんだね。『武蔵野市民であること』と『東京都民であること』の関係を考えたら、『「武蔵野市民である」ならば「東京都民である」』は正しいよね。

反対にする、つまり逆にした『「東京都民である」ならば「武蔵野市民である」』は正しくないこともある。東京都民であったとしても西東京市に住んでいたら武蔵野市民じゃないわけだからね。こういうような命題が成り立たない例のことを反例と言うんだったね。

大事なのはここからだよ。「必要条件」とか「十分条件」っていう話が出てくるのは、ある命題が成り立っているときだけなんだ。命題が成り立っていないのに、必要とか十分という話をすることは絶対にない。これを勘違いしている生徒は意外と多いんだ。

今の例で言えば、成り立っているのは『「武蔵野市民である」ならば「東京都民である」』だ。

このとき、「東京都民である」ことは「武蔵野市民である」ための必要条件

「武蔵野市民である」ことは「東京都民である」ための十分条件

というんだ。

必要とか、十分とかっていう言葉にはまだ納得できていないかもしれないね。こういう言い方をしたらどうだい？

・武蔵野市民であるためには東京都民であることが最低限**必要**だ。

・武蔵野市民でありさえすれば東京都民であるためにはもう**十分**だ。

翠：はぁ、確かにそうですね。武蔵野市は東京都の一部なんだからどっちもあたりまえですよね。言葉って面白いわ。

寛：なんで２つの言い方があるんだろう。

くぼじ：寛くん、いい所に目をつけたね。２つの言い方ってのはまさにその通りで、必要条件・十分条件というのは１つのことを、主語を取りかえて表現しただけなんだよ。
「$p \Rightarrow q$」が成り立つ。まずこれが絶対なんだ。
このときに、q を主語にした場合の「q であることは」というときには「p」は必要条件
p を主語にした場合の「p であることは」というときには「q」は十分条件
となるわけだね。

翠：なんか、難しく考えちゃってましたけど、今は納得できました。

寛：とてもすっきりしました。

くぼじ：すっきりしたついでに、数学の問題として出てきたときにとても有効な考え方を紹介しておこうか。さっき、翠ちゃんは「武蔵野市は東京都の一部なんだから」って言ってたね。ある命題がどのように成り立つのか、を考えるときには集合を利用して考えるととても便利なんだ。武蔵野市民と東京都民、人数が多いのはどっちかな。

翠：それは…もちろん東京都です！

くぼじ：そうだね。そして、命題が正しいのは「武蔵野市民」⇒「東京都民」だね。
集合を考えたときに成り立つのはいつだって『小さい集合から大きい集合へ矢印が向かうとき』なんだよ。２つの条件 p, q を見て、どちら向きに成り立つのかがわからないなら、それらをみたす集合 P, Q を考えてみる。P が Q に含まれているのなら $p \Rightarrow q$ が成り立つし、Q が P に含まれているなら $q \Rightarrow p$ が成り立つ。この考え方はとても有効なんだよ。

翠：そうなんですか。先生、私なりにまとめてみたんですけど、こういうことですか。
・必要条件、十分条件という概念はある命題が成り立つときに始めて意味がある。
・必要とか十分という言葉は主語によって使い方が変わるだけで、同じことを説明している。
・条件をみたす集合を考えると、命題は小さい集合から大きい集合の向きに成り立つ。

くぼじ：その通り！しっかりわかったみたいだね。必要条件も十分条件も成り立つときには「$p \Leftrightarrow q$」と表して、p は q の、q は p の必要十分条件であるというんだよ。このとき、p と q は「同値」とも言うし、必要十分条件は簡単に「条件」と言われることもあるからね。

翠、寛：はい、わかった気がします！実際に問題をやってみたくなってきました、 頑張ります！

＜例題２－１＞　□に入るものを次の①～④から選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

（1）xが実数のとき，$x^2=1$であることは$x=1$であるための$\boxed{}$。

（2）ある四角形において，２組の向かい合う辺が平行であることは，２本の対角線が互いに他を２等分するための$\boxed{}$。

（3）２つの実数a, bに対して，$|a|\leqq 2$かつ$|b|\leqq 1$であることは，$|a+b|\leqq 2$かつ$|a-b|\leqq 2$であるための$\boxed{}$。

（4）実数xが有理数であることは，xが有限小数であるための$\boxed{}$。

（5）ある自然数nに対し，$n=5k-4$（kは自然数）と表せることは，$4n+6$が５の倍数であるための$\boxed{}$。

＜例題２－２＞　□に入るものを次の①～④から選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

x, y, zを実数とするとき，「$x^2+y^2+z^2=0$」をA，「$x+y+z=0$かつ$xy+yz+zx=0$」をBとすると，AはBであるための$\boxed{}$。

また，「$x+y+z=0$かつ$xyz=0$」をCとすると，AはCであるための$\boxed{}$。

＜実戦演習２＞

２－１．次の□に入るものを次の①～④から選べ。ただし，a, b, c はいずれも実数である。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

（1）$a^2 > 0$ は $a > 0$ であるための$\boxed{}$。

（2）$a = b = 0$ であることは $a + b = 0$ であるための$\boxed{}$。

（3）$a = b$ は $ac = bc$ であるための$\boxed{}$。

（4）$a = b = c$ は $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ であるための$\boxed{}$。

（5）$a - b = 0$ であることは $|a - b| = |a + b|$ であるための$\boxed{}$。　（松山大・人文）

２－２．次の□に入るものを次の①～④から選べ。ただし，a, b, c はいずれも実数である。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

実数 x, y に対して，$x^2 + y^2 = 1$ は「$x \leqq 1$ かつ $y \leqq 1$」であるための$\boxed{}$。　（北見工大（後期））

２－３．次の□に入るものを次の①～③から選べ。

① 必要条件　② 十分条件　③ 必要十分条件

（1）$x = 1$ は，$x^2 = 1$ であるための$\boxed{}$である。

（2）$ab = 0$ は，$a = 0$ であるための$\boxed{}$である。

（3）$a = b$ は，$a - c = b - c$ であるための$\boxed{}$である。

（4）$x + y = 6$ は，$x = 1, y = 5$ であるための$\boxed{}$である。

（5）$ac = bc$ は，$c = 0$ であるための$\boxed{}$である。

（6）$a = b, c = d$ は，$a + c = b + d$ であるための$\boxed{}$である。

（7）$a = b$ であることは，$a^2 = b^2$ であるための$\boxed{}$である。

（8）$a + b, ab$ が整数であることは，a, b が整数であるための$\boxed{}$である。

（9）$a = b = 0$ であることは，$a^2 = b^2 = 0$ であるための$\boxed{}$である。

2－4．次の□に入るものを次の①～④から選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

実数$x,\ y$に対して，$x^2 = y^2$は$x = y$であるための$\square$。（北見工大）

2－5．$x,\ y$は実数とする。次の□に入るものを次の①～④から選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

（1）$x > y$は，$x^2 > y^2$であるための$\square$。

（2）$x^2 > y^2$は，$x^4 > y^4$であるための$\square$。

（3）$x + y > 2$は，$x > 1$または$y > 1$であるための$\square$。（神戸薬大）

2－6．次の条件$p,\ q$について，pはqであるための何条件か。必要条件である，十分条件である，必要十分条件である，必要条件でも十分条件でもない，のうち最も適切なものを答えよ。

（1）条件p：xは1桁の素数。　　条件q：xは10より小さい自然数。

（2）条件p：図形Fは長方形である。　　条件q：図形Fは正方形である。

2－7．次の□に入るものを次の①～④から選べ。ただし，「必要十分条件」があてはまるところに，「必要条件」または「十分条件」と解答した場合は不正解とする。また，$x,\ a,\ b$は実数，nは整数，θは一般角を表す。

① 必要条件　　② 十分条件　　③ 必要十分条件

（1）「$x = 4$」は，「$x^2 - x - 12 = 0$」の$\square$である。

（2）「$x^2 > 16$」は，「$x > 6$」の$\square$である。

（3）「$a > b$」は，「$a^3 > b^3$」の$\square$である。

（4）「$a < 0$ または $b < 0$」は，「$ab < 0$」の$\square$である。

（5）「$a + b > 0$ かつ $ab > 0$」は，「$a > 0$ かつ $b > 0$」の$\square$である。

（6）「ab が有理数である」は，「a と b がともに有理数である」の $\boxed{}$ である。

（7）「$a+b$ と ab がともに整数である」は，「a と b がともに整数である」の $\boxed{}$ である。

（8）「n^2 が 2 の倍数である」は，「n が 2 の倍数である」の $\boxed{}$ である。

（9）「$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$」は，「$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$」の $\boxed{}$ である。

２－８．次の□中に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち，最も適切なものをあてはめよ。

（1）$x<-1$ は $x^2 \geqq 1$ であるための $\boxed{}$ である。

（2）$x \leqq 2$ は $x^2 \leqq 1$ であるための $\boxed{}$ である。

（3）$x^2<1$ は $|x|<1$ であるための $\boxed{}$ である。

（4）$x>0$ は $x^2>0$ であるための $\boxed{}$ である。

（5）$x^2>1$ は $x>1$ であるための $\boxed{}$ である。

（6）$-2<x<3$ は $|x|<1$ であるための $\boxed{}$ である。

２－９．実数 x についての条件 p ： $x^2-10x+25-a^2>0$， q ： $x^2-2(a+2)x+8a>0$ がある。
a の値がどのような範囲内にあるとき， p が q の十分条件となるか。その範囲を求めよ。

第３回「相加平均と相乗平均の不等式」

a, b を正の実数とするとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad （等号成立は a=b のとき）$$

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots☆$$

a, b の相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ が，相乗平均 $\sqrt{ab}$ 以上であるという式なので，「相加平均と相乗平均の不等式」または「相加・相乗平均の不等式」と呼ばれています。その名の通りの式で覚えやすいですが、応用上は両辺を２倍した☆の形で用いることが多いです。

＜例題３－１＞　x を正の実数とするとき，以下の値を求めよ。

（１）$x+\dfrac{1}{x}$ の最小値

（２）$x+\dfrac{9}{x+2}$ の最小値

（３）$\dfrac{x^2+3x+11}{x+1}$ の最小値

＜例題３－２＞　$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

＜例題３－３＞　$x>0,\ y>0$ のとき，$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}\right)$ の最小値を求めよ。

数学物語（その３）

翠：私は**例題２**の$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$の最小値を次のように考えたんだけど…。

相加・相乗平均の不等式から、それぞれ

$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，　$2x+\dfrac{1}{2x} \geqq 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{1}{2x}}=2$　が成り立つので

$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2$，$2x+\dfrac{1}{2x} \geqq 2$　となるでしょ。

2つの式の両辺をそれぞれかけて　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right) \geqq 2\cdot 2=4$

だから、最小値は4となる。でも、**例題２**の答えでは$\dfrac{9}{2}$だったわ。

不等式をちゃんと利用したのに、どこが間違っているのかしら。

寛：どうしてそんなこと考えるのかな。
　さっきので答えが出てるんだからそれでいいじゃんか。

翠：じゃあ、私の考えで出てきた最小値4というのは間違いなの？

寛：そりゃー間違いだろ。$\dfrac{9}{2}$が正しいってことになってるんだから。

翠：なってるって何よそれ。

くぼじ：おやおや。翠ちゃんも寛くんも落ち着きなさい。翠ちゃんの考えで出てきた最小値4というのこの手の問題でよくやってしまう間違いなんだよ。でも、どこがいけないのかはっきりさせておかないと、これからも間違えてしまうかもしれないね。この問題を考えてみてくれるかい。

$x>0,\ y>0$のとき，$\left(x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{8}{x}\right) \geqq 18$　が成り立つことを示せ。

翠：たしか、$a>0,\ b>0$だったら　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，つまり、$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$が成り立つから，

$x+\dfrac{2}{y} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{y}}$，　$y+\dfrac{8}{x} \geqq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{8}{x}}$

それで、この両辺は正だから両辺をそれぞれかけて

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right) \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{y}}\times 2\sqrt{y\cdot\frac{8}{x}}$$

となって，右辺を整理するとこの不等式は

$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right) \geqq 16$ …①　となる…あれ？18 じゃないわね。

寛：あぁ、わけがわかんない。問題の間違いなんじゃないの？

くぼじ：翠ちゃん、先に展開してから相加平均・相乗平均の不等式を使ってごらん。

翠：やってみます。

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right) = xy+2+8+\frac{16}{xy} = xy+\frac{16}{xy}+10$$

これが左辺を展開したものね。

それで、相加平均と相乗平均の関係を $xy+\frac{16}{xy}$ の部分に対して使うと

$$xy+\frac{16}{xy}+10 \geqq 2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}+10 = 2\cdot 4+10 = 18$$

あ、$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right) \geqq 18$ になったわ。

寛：解けたね、これで解決！

翠：解決してないわよ。

寛：なんでだよ。

翠：私が出した式①は何なの？違っているっていうこと？

くぼじ：まぁまぁ２人とも落ち着いて。これは、どちらも正しいんだよ。いいかい、説明するよ。

$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right) \geqq 16$ はどんな正の数 x, y を代入しても左辺は 16 以上であるということを

言っただけで、それはそれで正しい。

一方で、$\left(x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{8}{x}\right) \geqq 18$ も

$\left(x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{8}{x}\right)$ がどのような正の数 x, y に対しても 18 以上であることを言っただけなので、これはこれで正しいってことなんだ。
ただ、実際のところ、この不等式の左辺が 16 や 17 という値になることはない。等号の成立を確認するとわかるんだけど、左辺の最小値は 18 なんだ。
「 ≧ 」や「 ≦ 」という記号の意味を誤解している人がいる。
「 ≧ 」は「 ＞ または ＝ 」ということを表している記号で、「または」は少なくともいずれか一方が成り立てばよいのだから，実際に右辺の値になることがあるかどうかまでは判断していないんだ。
だから、相加平均と相乗平均の不等式を利用して最小値を求める問題では、実際に等号が成り立つのかどうかを確認しなければいけないんだよ。

翠：わかったわ！$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right) \geqq 4$ も、この式自体は間違っているわけではないのね。

正しい最小値 $\dfrac{9}{2}$ は確かに 4 以上の数だし。でも、実際に 4 になるかというと、

$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2$，$2x+\dfrac{1}{2x} \geqq 2$ の等号を成り立たせる x が同じではないからダメなのね。

１つ目の等号は $x=1$，２つ目の等号は $x=\dfrac{1}{2}$ のときだから。

寛：なるほどぉ。ちゃんと考えるって大切なことなんだな。俺もこれからは気をつけるよ！

くぼじ：数学は厳密さを大切にしている学問だ。だからこそ、証明されたものは絶対的に信頼できる。数学で論理的な思考を訓練しておくことは社会に出ても必ず役に立つ。残念なことだけど人をだまそうとする悪い人が世の中にはいる。数学をしっかり身につけておけば、だまされたりすることもないんだよ。

翠，寛：先生、そうなんですね、もっと数学頑張ります！

<実戦演習３>

３－１．$a>0,\ b>0,\ a+b=1$のとき，$\left(2+\dfrac{1}{a}\right)\left(2+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 16$　を証明せよ。（広島女子大）

３－２．$x<1$のとき，xの関数 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ は，$x=\boxed{}$において最大値$y=\boxed{}$をとる。（関西大）

３－３．すべての$a>0$に対して，$a+\dfrac{4}{a}\geqq b$をみたす最大のbは$\boxed{}$である。（慶應大 総合政策）

３－４．$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$のとき，$(a+b)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)\geqq 4\sqrt{\dfrac{ab}{cd}}$ が成り立つことを示せ。

（津田塾大 学芸・英文）

３－５．xが正の数のとき，$x+\dfrac{16}{x}$の最小値は$\boxed{}$であり，$x+\dfrac{16}{x+2}$の最小値は$\boxed{}$である。

（九州産業大 経営）

３－６．xが正の数のとき，$\dfrac{x}{x^2+16}$の最大値は$\boxed{}$であり，このとき，xの値は$\boxed{}$である。

（九州産業大 経営）

３－７．$a>0,\ b>0,\ c>0,\ k>0$とする。

このとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{k^2}{a}\right)\geqq (k+1)^2$となることを示せ。

また，この結果を利用して，

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right)\geqq (k+1)^4$$

となることを示せ。

（甲南大・理工，知能情報）

３－８．$x,\ y$を正の数とするとき，$(3x+2y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ の最小値を求めよ。

（同志社女子大）

3－9．直方体の体積をk^3とし，その直方体の縦，横，高さをそれぞれa, b, hとする。
（1）直方体の体積k^3と高さhを固定したとき，対角線の長さの２乗の最小値を求めよ。
（2）体積がk^3である直方体の中で，対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

（岩手大・教育，農）

3－10.

（1）a, bを正の実数とする。このとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ であることを証明せよ。

（2）（1）の不等式を利用して $2x+\dfrac{3}{x}$ の最小値を求めよ。ただし，xは正の実数とする。

（3）あるリサイクル工場では，xトンの資源ゴミを一度にリサイクルするのに

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+8$ の費用がかかる。ただし，$x>0$とする。

１トンあたりのリサイクル費用を最も安くするためには，一度に何トンずつリサイクルすればよいか。（1）で示した不等式を利用して求めよ。また，そのときの１トンあたりのリサイクル費用を求めよ。

（専修大・経，商，文）

3－11． $2x+y=2$をみたす正の数x, yに対して，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$の最小値とそのときの$x, y$の値を求めよ。

（福岡大・理）

3－12．実数a, bが$a>-1, b>-2$であるとき，次の式の最小値を求めよ。

$$2b+\frac{2}{a+1}+\frac{2a+2}{b+2}$$

（釧路公立大）