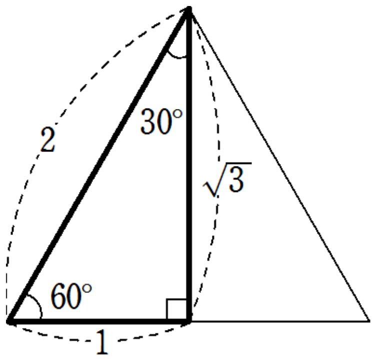
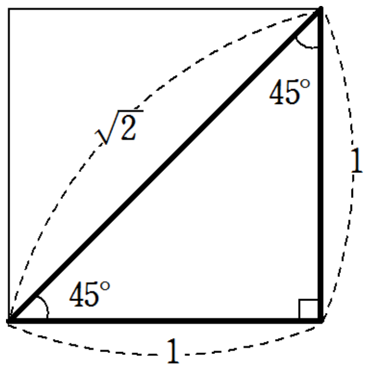
三角関数 MANIA!

■Part 1 【正三角形・正方形がカギを握る！三角比再考】

A．有名角の三角比は正三角形・正方形を二等分した図に注目

① $1:2:\sqrt{3}$　　　　② $1:1:\sqrt{2}$



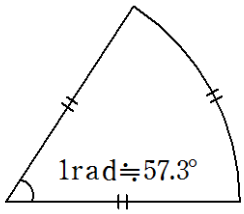


B．弧度法：ラジアンの導入

弧の長さが半径と等しい扇形の中心角を１ラジアン（rad）とする測り方

弧度法によって角度を長さで測り，表すことができるようになることで，

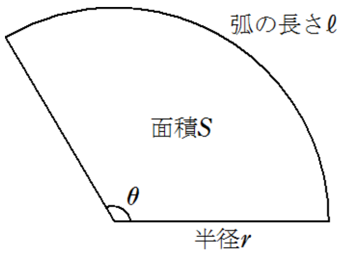
グラフや方程式を考えたりすることが簡単になります。



半径が１の円の円周の長さは2πなので，360°が2πラジアンと等しいことから $\boxed{180^\circ=\pi\text{ラジアン}}$

が成り立ちます。

ラジアン導入により，扇形の弧の長さ，面積の定量が容易になります。覚えておくとよいでしょう。



$$\ell=r\theta$$

$$S=\frac{1}{2}r\ell=\frac{1}{2}r^2\theta$$

【例題１】次の角度を弧度法で表せ。

(1) 45°　　　　(2) 120°

【演習１】次の角度を弧度法で表せ。

(1) 60°　　　　(2) 150°　　　　(3) 270°

■Part２【cos・sin・tan，単位円との正しい付き合い方】

Ａ．単位円

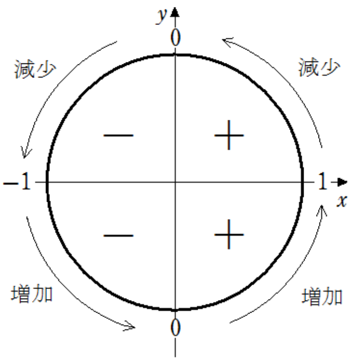
半径１の円を単位円という。原点を中心として考えることが多い。

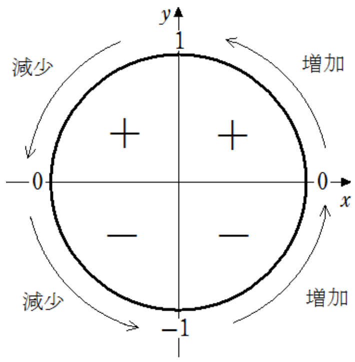
Ｂ． cos, sin, tan と周期

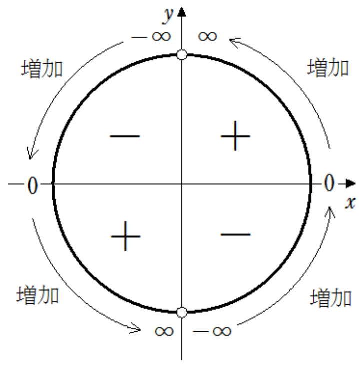
原点Ｏと単位円周上の点Ｐを結ぶ動径と x 軸正方向とのなす角を θ とすると，$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ は

周期をもつ関数となる。単位円を１周するとき，それぞれの関数は次のように変化する。

① $\cos\theta$（x 座標の動き）　② $\sin\theta$（y 座標の動き）　③ $\tan\theta$



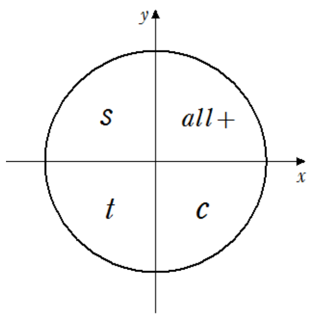




これらは三角関数を含む方程式や不等式を解く上で重要な役割を果たすので，しっかり覚えること。

$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ がどのエリア（象限）で正・負になるかは重要であるが，

そこに注目し，どの象限で正になるかを表したものが右の図である。



【例題２】

(1) θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を求めよ。

【演習２】

(1) θ が第 4 象限の角で，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

C．相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

D．周期性・$-\theta$・補角・余角の計算など

周期性： $\begin{cases} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta \end{cases}$　　$-\theta$ ： $\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$

補角・余角など： $\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \end{cases}$　$\begin{cases} \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \\ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}\qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

補角・余角の公式は，導き方を知っておけば簡単に求められるので覚える必要はない。

【例題３】次の三角関数を鋭角の三角関数で表し，その値を求めよ。

(1) $\sin\frac{13}{3}\pi$　　(2) $\cos\frac{7}{6}\pi$　　(3) $\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

【演習３】次の三角関数を鋭角の三角関数で表し，その値を求めよ。

(1) $\cos\frac{17}{4}\pi$　　(2) $\sin\frac{11}{6}\pi$　　(3) $\tan\frac{19}{6}\pi$

(4) $\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$　　(5) $\tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$

■Part３【方程式と不等式，最大・最小は遺言に耳を傾けろ】

Ａ．三角関数を含む方程式

【例題４】次の等式を満たすθを指定された範囲において求めよ。

(1) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

(2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\quad(-\pi\leqq\theta<\pi)$

(3) $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

【演習４】次の方程式を解け。

(1) $2\sin\theta=1\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

(2) $4\cos^2\theta-3=0\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

（3）$\tan\theta = \dfrac{3}{\tan\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

（4）$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

（5）$\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

（6）$\sin 2\theta + \cos\theta = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(7) $2\sin^2\theta+5\cos\theta-4=0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(8) $2\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}=0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(9) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2} \quad (0 \leqq x < 2\pi)$

(10) $\sin 3x-\sin x-\cos 2x=0 \quad (0 \leqq x < \pi)$

Ｂ．三角関数を含む不等式

【例題５】次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(2) $\cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(3) $\tan\theta \geqq 1\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(4) $\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(5) $\cos\theta > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(6) $\sin 2\theta + \cos\theta < 0\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

【演習５】次の不等式を解け。

（1）$2\sin\theta \geqq \sqrt{3} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

（2）$2\cos\theta + 1 \leqq 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

（3）$\tan\theta \leqq -1 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

（4）$\tan 2\theta > -\sqrt{3} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(5) $\sin 2\theta - \sin\theta < 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(6) $2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(7) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(8) $2\sin^2 x+3\cos x<0 \quad (0\leqq x<2\pi)$

(9) $\cos^2 x-4\cos x\sin x-3\sin^2 x>-3 \quad (0\leqq x<\pi)$

(10) $-2\sin^2\theta\cos^2\theta+5\sin\theta\cos^2\theta-6\sin^2\theta+12\sin\theta-6\geqq 0 \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

C．三角関数の最大・最小

【例題６】

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，x の関数 $y = 2\sin x + \cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの x の値を求めよ。

【演習６】

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$y = -\cos 2\theta - 8\cos\theta + 5$ の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの θ の値を求めよ。

(2) 点$(x,\ y)$が，原点Oを中心とする半径 1 の円周上を動くとき， $x^2+4xy-2y^2$の最大値と最小値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)=\sin 2x+\sin x-\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

■Part４【$\pi \fallingdotseq 3.14$，あなたの描くグラフはこれだけいい加減】

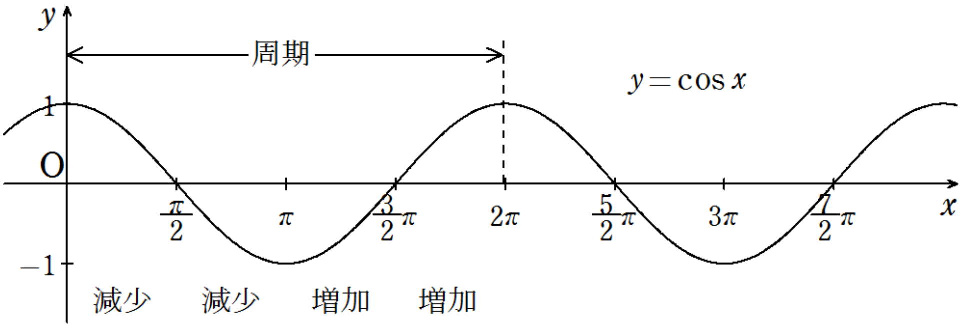
Ａ．三角関数の基本グラフ

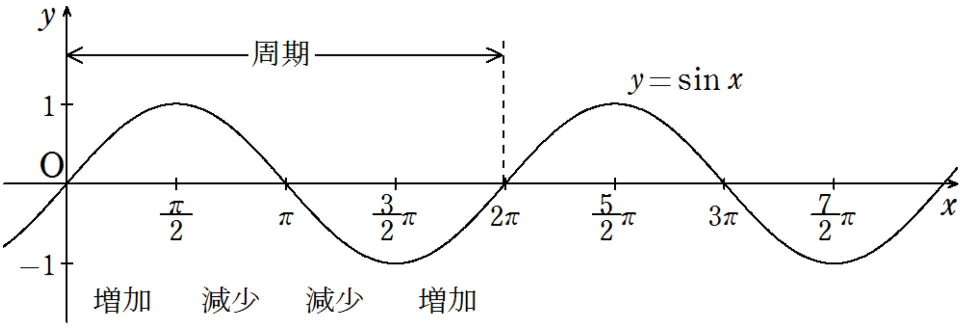
$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の動きはＢで説明した通りだが，これをグラフにすると

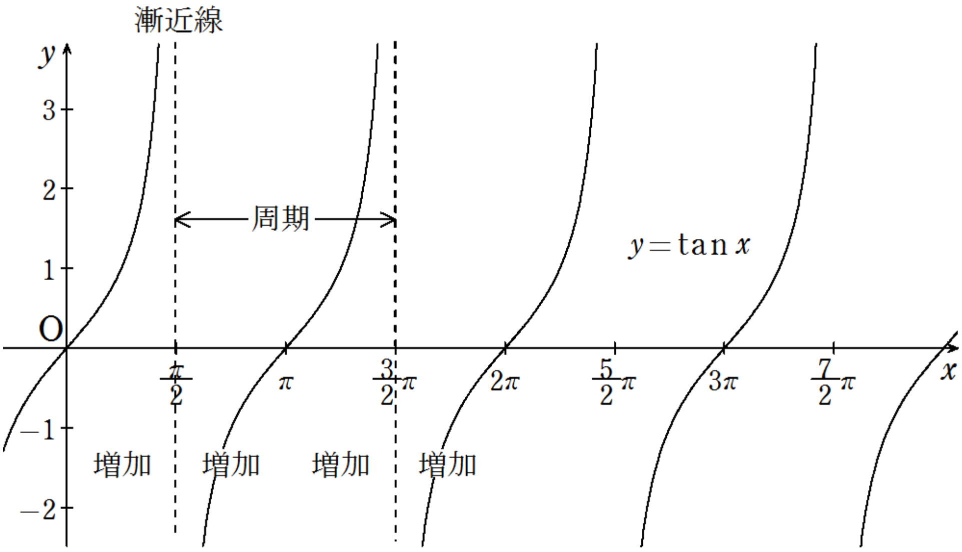
次の図のようになる。増加・減少の動きに注目することと，$\pi \fallingdotseq 3.14$ より

cos, sin の１つの山の縦と横の長さの比は約１：３であることがわかる。

これを意識してかくと，バランスのよいグラフが描ける。







B．グラフの縦・横方向の拡大＆縮小

一般的に $y = f(x)$ に対し，$k > 0$ とするとき

$y = k \cdot f(x)$ → （x 軸を中心として）y 軸方向（縦方向）に k 倍の拡大・縮小

$y = f(kx)$ → （y 軸を中心として）x 軸方向（横方向）に $\dfrac{1}{k}$ 倍の拡大・縮小

※ 三角関数の周期の変化に影響するのは x の係数

【例題７】次の関数の周期を求め，グラフを描け。

（1）$y = 2\sin x$

（2）$y = \cos 3x$

【演習７】次の関数の周期を求め，グラフを描け。

（1）$y = 2\cos x$

（2）$y = \sin \dfrac{1}{2}x$

Ｃ．グラフの平行移動

一般的に $y=f(x)$ に対し，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した図形の方程式は

$$y-q=f(x-p)$$

【例題８】 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描け。

【演習８】次の関数のグラフを描け。

(1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y=\sin\left(2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$